（問題４１２）

ある放射性物質が，放射線を出しながら崩壊する速さはそのときの放射性物質の量に比例する。その比例定数を１とし，１時間ごとにその物質が m ずつ供給されるものとする。ただし $m>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=0$ に初めて m 供給されたとき，次回の供給まで $(0 \le t < 1)$ の量 $M_1(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた微分方程式を解き， $M_1(t)$ を求めよ。

(3) 2 回目の供給後 $(1 \le t < 2)$ の量 $M_2(t)$ を求めよ。

(4) n 回目の供給後 $\left((n-1) \le t < n\right)$ の量 $M_n(t)$ を求めよ。

（解答）

(1)

$$\frac{dM_1}{dt} = -M_1$$

(2)

$$\int \frac{dM_1}{M_1} = \int -dt$$

$$\log M_1 = -t + C_1$$

$$t=0 \Rightarrow M_1 = m$$

$$C_1 = \log m$$

$$\log M_1 = -t + \log m$$

$$\log \frac{M_1}{m} = -t$$

$$\frac{M_1}{m} = e^{-t}$$

$$M_1 = me^{-t}$$

(3)

$$\frac{dM_2}{dt} = -M_2$$

$$\frac{dM_2}{M_2} = -dt$$

$$\int \frac{dM_2}{M_2} = \int -dt$$

$$\log M_2 = -t + C_2$$

$$t = 1 \Rightarrow M_2 = \frac{m}{e} + m = m\left(\frac{1}{e} + 1\right)$$

$$\log m\left(\frac{1}{e} + 1\right) = -1 + C_2$$

$$C_2 = 1 + \log m\left(\frac{1}{e} + 1\right) = 1 + \log m\left(\frac{1+e}{e}\right) = \log m(1+e)$$

$$\log M_2 = -t + \log m(1+e)$$

$$\log \frac{M_2}{m(1+e)} = -t$$

$$\frac{M_2}{m(1+e)} = e^{-t}$$

$$M_2 = m(1+e)e^{-t}$$

(4)

$$\frac{dM_3}{dt} = -M_3$$

$$\frac{dM_3}{M_3} = -dt$$

$$\log M_3 = -t + C_3$$

$$t = 2 \Rightarrow M_3 = m\frac{1+e}{e^2} + m = m\left(\frac{1+e+e^2}{e^2}\right)$$

$$\log m\left(\frac{1+e+e^2}{e^2}\right) = -2 + C_3$$

$$C_3 = \log m\left(\frac{1+e+e^2}{e^2}\right) + 2 = \log m(1+e+e^2)$$

$$\log M_3 = -t + \log m(1+e+e^2)$$

$$\log\frac{M_3}{m(1+e+e^2)} = -t$$

$$\frac{M_3}{m(1+e+e^2)} = e^{-t}$$

$$M_3 = m(1+e+e^2)e^{-t}$$

$$M_k = m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1})e^{-t}$$

$$\frac{dM_{k+1}}{dt} = -M_{k+1}$$

$$\frac{dM_{k+1}}{M_{k+1}} = -dt$$

$$\log M_{k+1} = -t + C_{k+1}$$

$$t = k \Rightarrow M_{k+1} = m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1})e^{-k} + m = m\left(\frac{1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k}{e^k}\right)$$

$$\log m\left(\frac{1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k}{e^k}\right) = -k + C_{k+1}$$

$$C_{k+1} = \log m\left(\frac{1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k}{e^k}\right) + k = \log m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k)$$

$$\log M_{k+1} = -t + \log m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k)$$

$$\log\frac{M_{k+1}}{m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k)} = -t$$

$$M_{k+1} = m(1+e+e^2+\cdots e^{k-1}+e^k)e^{-t}$$

ゆえに数学的帰納法より

$$M_n = me^{-t}\sum_{k=0}^{n-1} e^k$$