（問題３６４）

xyz 空間において，yz 平面上の放物線 $z=y^2$ を z 軸の周りに回転してできる曲面と平面 $z=y$ で囲まれた立体を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 平面 $y=t$（ただし，$0\leq t\leq 1$）で D を切ったときの切り口の面積を $S(t)$ とするとき，

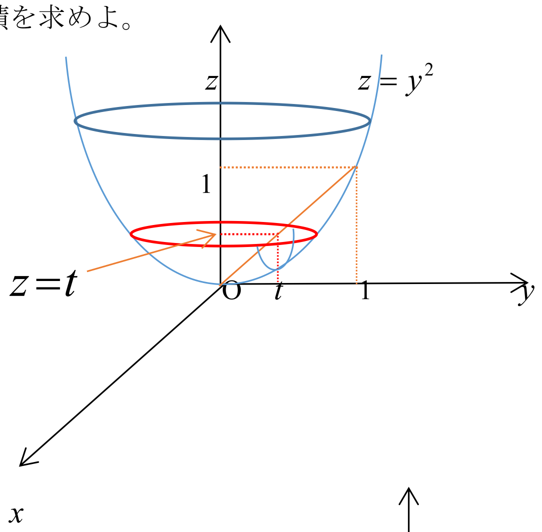
$S(t)=\dfrac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}$ となることを示せ。

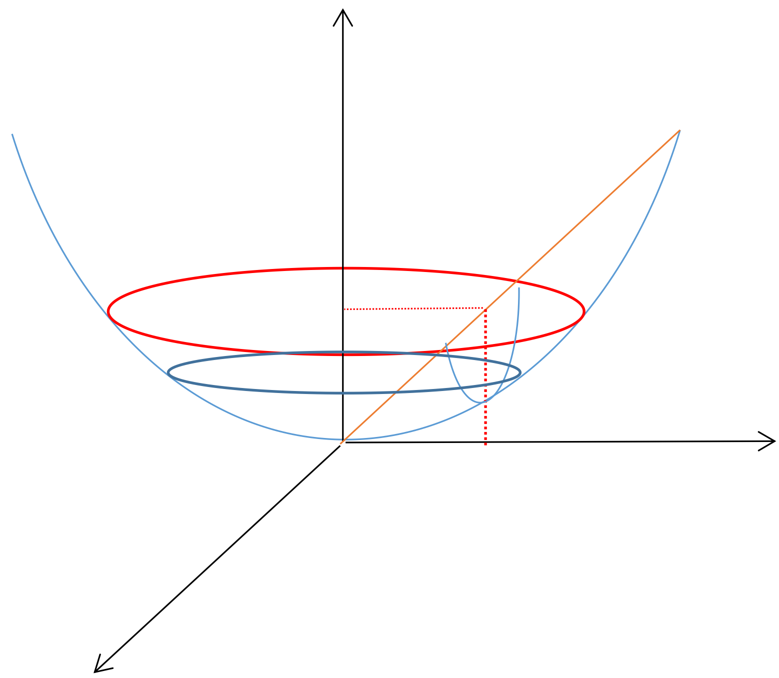
(2) $t=\sin^2\theta$ とおけば，$\displaystyle\int_0^1 S(t)dt=\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(2\theta)d\theta$ となることを示せ。

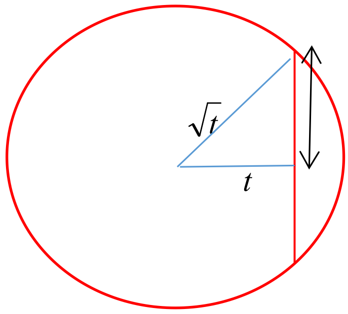
(3) 立体 D の体積を求めよ。

（解答）

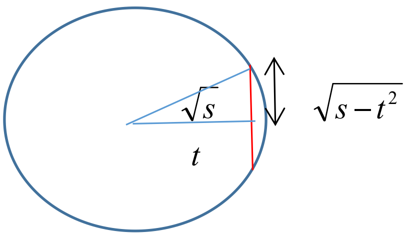
(1)







$z=t$



$z=s$

$$S(t)=\int_{t^2}^{t}2\sqrt{s-t^2}\,ds$$

$$\sqrt{s-t^2}=u$$

$$s-t^2=u^2,ds=2udu,u:0\to\sqrt{t-t^2}$$

$$=\int_0^{\sqrt{t-t^2}}2u2udu$$

$$=\left[\frac{4}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{t-t^2}}=\frac{4}{3}(t-t^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}$$

(2)

$$\int_0^1\frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}dt$$

$$t=\sin^2\theta,dt=\sin 2\theta d\theta,\theta:0\to\frac{\pi}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}(1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin^3\theta\sin 2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\cos^3\theta\sin^3\theta\sin 2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{6}(\sin 2\theta)^4d\theta$$

(3)

$$D = \int_0^1 S(t)dt = \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 4\theta + \cos^2 4\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-2\cos 4\theta + \frac{\cos 8\theta + 1}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}-2\cos 4\theta + \frac{\cos 8\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{2}\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} + \frac{\sin 8\theta}{16}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{3}{4}\pi\right] = \frac{\pi}{32}$$