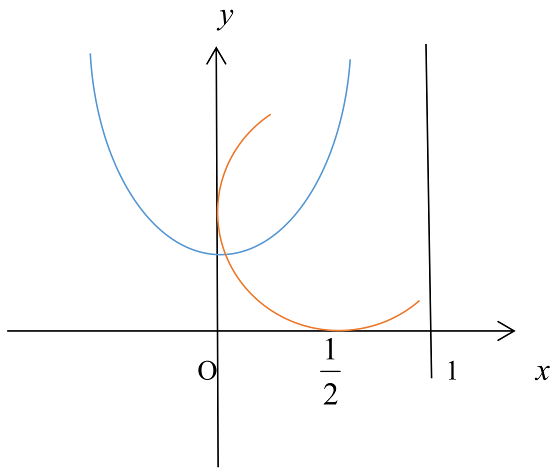
（問題３６１）

放物線 $y=\sqrt{2}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ を時計回りに原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した図形を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。
(2) 直線 $x=a$ が C と接しているとき，a の値を求めよ。
(3) C と直線 $x=1$ とで囲まれる図形を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積 V を求めよ。

（解答）



(1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t + \sqrt{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ -t + \sqrt{2}t^2 + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\left(t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(t + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \\ \left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = t + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \sqrt{y} = t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{y}$$

$$x - \sqrt{2x} + \frac{1}{2} = y$$

(2)

（解法のテクニック）
y についての方程式

$$a - \sqrt{2a} + \frac{1}{2} = y$$

が重解を持つ。

$$a-y+\frac{1}{2}=\sqrt{2a}$$

$$a^2+y^2+\frac{1}{4}-2ay+a-y=2a$$

$$a^2+y^2+\frac{1}{4}-2ay-a-y=0$$

$$y^2-(2a+1)y+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$D=(2a+1)^2-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$4a+1+4a-1=0$$

$$\therefore a=0$$

(3)

$$x-y+\frac{1}{2}=\sqrt{2x}$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{4}-2xy+x-y=2x$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{4}-2xy-x-y=0$$

$$y^2-(2x+1)y+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{2x+1\pm\sqrt{(2x+1)^2-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}{2}=x+\frac{1}{2}\pm 2\sqrt{2x}$$

$$V=\pi\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}+2\sqrt{2x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}-2\sqrt{2x}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1 2\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)2\sqrt{2x}dx$$

$$=8\sqrt{2}\pi\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=8\sqrt{2}\pi\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=8\sqrt{2}\pi\frac{11}{15}=\frac{88\sqrt{2}}{15}\pi$$