

(問題 3 2 9)

p, q を素数とする。 x についての 2 次方程式 $4x^2 - 4(p+q)x + p^2 = 0$ が有理数解をもつような p, q の値と、有理数解を求めよ。

(解答)

重解をもつとき

$$(2x - p)^2 = 0$$

$$4p = 4(p+q) \Rightarrow q = 0$$

ゆえに重解は持たない。

有理数解を持つように因数分解

(i)

$$(2x - p^2)(2x - 1) = 0$$

$$2(p^2 + 1) = 4(p + q)$$

$$p^2 + 1 = 2(p + q)$$

(ii)

$$(4x - p^2)(x - 1) = 0$$

$$p^2 + 4 = 4(p + q)$$

$$p^2 = 4(p + q - 1)$$

(左辺) は奇数。(右辺) は偶数となり矛盾する。

(iii)

$$(x - p^2)(4x - 1) = 0$$

$$4p^2 + 1 = 4(p + q)$$

(左辺) は奇数。(右辺) は偶数となり矛盾する。

(i)

$$p^2+1=2p+2q$$

$$(p-1)^2=2q$$

$$p-1=\sqrt{2q}$$

$2q$ は平方数。かつ q は素数。この条件を満たす q は $q=2$ のみ。 $p=3$

有理数解は $\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$