（問題３９３）
次の各問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$ であることを証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}$ を求めよ。

（解答）

$$f(x)=\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x}$$

$$=\frac{x^2}{1+x}>0(x>0)$$

$f(x)$ は $x>0$ で単調増加。

$f(0)=0$ より

$f(x)>0(x>0)$

$$g(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log(1+x)$$

$$g'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{(1-x)(x+1)+x^2(1+x)-1}{1+x}$$

$$=\frac{x^3}{1+x}>0(x>0)$$

$g(x)$ は $x>0$ で単調増加。

$g(0)=0$ より

$g(x)>0(x>0)$

(2)

(1) より

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)-x<-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}<x-\log(1+x)<\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{\log(1+x)}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{x}{2\log(1+x)}$$

$$\frac{1}{\log(1+x)}\left(\frac{3x-2x^2}{6}\right)<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{x}{2\log(1+x)}$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-2x^2}{6\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3-4x}{\frac{6}{1+x}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\log(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{2}{1+x}}=\frac{1}{2}$$

ゆえに，はさみうちの定理より

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{2}$$