（問題１）

1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA，AC，OB，BC 上に，それぞれ P，Q，R，S を

$AP = PR = t, AQ = BS = u$ となるようにとる。ただし，$0 < t < 1, 0 < u < 1$ である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および t, u を用いて表せ。

(2) $PQ = RS$ であることを示せ。

(3) $\angle PQS = \angle RSQ$ であることを示せ。

（問題２）

直線 $l : x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = -z$ と平面 $\alpha : 2x - 1 + z = 1$ 上の直線 m が交わっているとき

(1) m, l が直交するとき，m の方程式を求めよ。

(2) m, l のなす角を最小にする m の方程式を求めよ。

（問題３）

空間において，$\left|\overrightarrow{OP}\right| = 2, \overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{e_3}$（z 軸の正の向きの単位ベクトル）とのなす角が 30° であるような動点 P があるとき

(1) 点 P はどのような図形上を動くか。

(2) 定点 A $(3,4,0)$ より直線 OP に下した垂線の長さが最小となる P の座標を求めよ。

（問題４）

点 $P(a,b,c)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (1,1,2)$ に平行な直線を l とする。

また，方程式 $x + y + z = 10$ で定まれる平面を π とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と π の交点 Q の座標を求めよ。

(3) 点 P は x 軸上を動くとする。このとき，交点 Q の軌跡を求めよ。

(4) 点 P が $x = 2x = 3z$ で定められる直線上を動くとする。このとき，交点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

（問題５）

点 P,Q はそれぞれ直線 AB，CD 上を等速度 $\vec{u},\vec{v}$ で進む。（出発点はそれぞれ A,C で O は AC の中点）

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OR}=\vec{x}$ （R は PQ を 1:2 に内分する点）として， R の軌跡をベクトル方程式で表せ。

(2) PQ の長さが最短となるときの， $\vec{x}$ を求めよ。

（問題６）

四面体 $2x-y-z\geq -1, x-2y-z\leq -1, x-y+2z\geq 1, 2x+y+z\leq 2$ について

(1)平面 $2x+y-z=-1, x-2y-z=-1$ の交点を含み，この四面体の体積を２等分する平面の方程式を求めよ。
(2)この四面体に内接する球の方程式を求めよ。

（問題７）

空間の定点 $O(0,,0,0)$， $A(4,4,4)$ および $Q(x',y',z')$ があり

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=4\cdots$①が満たされている。いま点 $P(x,y,z)$ が

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ で与えられているとする。点 Q が①を満たす範囲を動くとき，
点 P の描く図形の方程式を求めよ。

（問題８）

座標空間において，３点 $A(1,1,1), B(1,0,2), C(2,0,0)$ をとる。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 点 P が xy 平面上の曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を動くとき，四面体 PABC の体積の最大値と最小値を求めよ。

（問題９）

空間に直線 $l: x-4=-y=\dfrac{z-3}{4}$ と平面 $\pi: x-4y+z+2=0$ がある。
(1) 直線 l の平面 π への正射影を l' とする。 l' の方程式を求めよ。
(2) l と l' を含む平面の方程式を求めよ。

(3) l と l' のなす角 $\theta\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

（問題１０）

空間に２平面 $\alpha : \dfrac{1}{2}x - y + z + 1 = 0, \beta : -2x + y + 2z - 1 = 0$ がある。

(1) α と β との交線 l を求めよ。

(2) l を含み，α と β のなす角を２等分する平面を求めよ。

(3) 点 $P(1,4,1)$ の α に対する対称点 Q の座標を求めよ。

（問題１１）

$OA = 3, OB = 4$ である三角形 OAB において, 辺 OA を 1:2 に内分する点を P , 辺 OB を $3:2$ に内分する点を Q とする。更に，線分 AQ を $5:1$ に内分する点を R とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{BR}$ をベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) 点 R は線分 BP 上にあることを示せ。

(3) $AQ \perp BP$ であるとき，内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。

（問題１２）

座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ が $\vec{p}$ であるとき点 P を $P(\vec{p})$ で表す。ベクトル $\vec{b} = (1,1)$ に対して，不等式 $\left|\vec{p} - \vec{b}\right| \leq \left|\vec{p} + 3\vec{b}\right| \leq 3\left|\vec{p} - \vec{b}\right|$ を満たす点 $P(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ。

（問題１３）

平面上に１辺の長さが２のひし形 OACB があり，対角線 AB の長さは $\sqrt{2}$ である。t を正とし，線分 AC，BC をそれぞれ $1:t$ に内分する点を P,Q とする。また，直線 AQ と直線 BP の交点を R とする。

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OR}$ を $t, \vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 点 A が線分 OR を直径とする円の周上にあるとき， t の値を求めよ。

（問題１４）

空間内に３点 $A(0,0,1), B(0,2,0), C(0,0,3)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}\right)=0$ を満たしながら動くときこの点 P はある点 Q から一定の距離にあることを示せ。
(2) (1)における定点 Q は３点 A,B,C を通る平面上にあることを示せ。
(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

（問題１５）
空間の２点 P,Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$\overrightarrow{OP}=(2\cos t, 2\sin t, 1), \overrightarrow{OQ}=(-\sin 3t, \cos 3t, -1)$ によって与えられている。

ただし， $-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。

（問題１６）

四角形 ABCD を底面とする四角錘 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており, 0 と異なる４つの実数 p, q, r, s に対して P,Q,R,S を

$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OD}$ によって定める。このとき P,Q,R,S が度横溢

平面上にあれば $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成り立つことを示せ。

（問題１７）
三角形 ABC の重心を G，外心を E とする。次を示せ。

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EH}$ となる点を H とする。点 H は三角形 ABC の垂心がある。

(3) E,G,H は一直線上にあり， $EG:GH=1:2$ である。

（問題１８）

xyz 直交座標上の点 $A(2,2,0), B(2,0,2), C(0,2,2)$ 三角形 ABC への原点 O から

下した垂線の点の座標を求めよ。

（問題１９）

a,b を $a<b$ を満たす正の定数とし，C を双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2-a^2=1}$ とする。

C 上の点 $P(\alpha,\beta)$ ただし $\beta\neq 0$ における C の接線，法線をそれぞれ l_1,l_2 とする。

また，Q を l_1 と y 軸との交点，R を l_2 と y 軸との交点とする。

(1) l_1 および l_2 の方程式を求めよ。また Q,R の座標を求めよ。

(2) ４点 $P,Q,R,S(b,0)$ は同一周上にあることを示せ。

（問題２０）

２平面 $2x+3y-4=0, x+y-z=3$ の交線 l と球面 $x^2+y^2+z^2=9$ の交点の座標を求めよ。

（問題２１）

三角形 ABC において

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x, \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=y, \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=z$ とおく。

(1) 各辺の長さ x,y,z を用いて表せ。

(2) $xy+yz+zx>0$ を証明せよ。

（問題２２）

同一平面上にない４点 A,B,C,D に対して O を四面体 ABCD の内部の点とし，４頂点 A B,C,D の位置ベクトルを $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ と表す。

(1) 点 P が平面 ABC 上にあるための必要十分条件は $p+q+r=1$ を満たす p,q,r が存在して $\overrightarrow{OP}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ と表せることとする。これを証明せよ。

(2) $a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2$ を 0 でない定数とするとき

$a_1\vec{a}+b_1\vec{b}+c_1\vec{c}+d_1\vec{d}=\vec{0}, a_2\vec{a}+b_2\vec{b}+c_2\vec{c}+d_2\vec{d}=\vec{0}$

が同時に成り立つならば

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$ であることを証明せよ。

(3) A_1, B_1, C_1, D_1をそれぞれ平面BCD，CDA，DAB，ABC上の点とする。

ある正の定数kに対して

$\overrightarrow{OA_1} = -k\vec{a}, \overrightarrow{OB} = -k\vec{b}, \overrightarrow{OC_1} = -k\vec{c}, \overrightarrow{OD_1} = -k\vec{d}$

が成り立つとき，kの値を求めよ。

（問題２３）

球$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$上の点$P(a,b,c)$を通る平面

$a(x-a) + b(y-b) + c(z-c) = 0$と点$(2,1,1)$の距離を$d(P)$とする。

(1) $d(P)$をa,b,cで表せ。

(2) 正の数rに対して，球S上の点Pで$d(P) = r$となるもの全体が１つの円となるという。このようなrの値の範囲を求めよ。

（問題２４）

正四面体の４つの頂点をA,B,C,Dとする。s,tを$0 < s < 1, < t < 1$を満たす整数とし

線分ABを$s:(1-s)$に内分する点をE

線分ACを$t:(1-t)$に内分する点をF

線分ADを$t:(1-t)$に内分する点をG

とおく。３点E,F,Gを通る平面が，３点B,C,Dを通る円と共有点を持つためにs,tの満たすべき条件を求め，点(s,t)の範囲を平面上に図示せよ。

（問題２５）

空間の零ベクトルでない２つのベクトル$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$と$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$が垂直であるとき，$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$に対して$\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$が$\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} + \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$に等しいとする。

(1) $\left(\vec{p} - \vec{q}\right)\cdot\vec{a} = 0, \left(\vec{p} - \vec{q}\right)\cdot\vec{b} = 0$となることを示せ。

(2) $\left|\vec{q}\right| \leq \left|\vec{p}\right|$となることを示せ。

(3) ３点 O,A,B を通る平面上の点 R が点 Q と異なるとき，$\vec{r}=\overrightarrow{OR}$ に対して

$\left|\vec{r}-\vec{p}\right|>\left|\vec{q}-\vec{p}\right|$ が成り立つことを示せ。

（問題２６）
直角三角形でない三角形 ABC と，その内部の点 P があって，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ を満たしている。

(1) 線分 PA，PB、PC は，それぞれ，辺 BC，CA，AB に垂直であることを示せ。

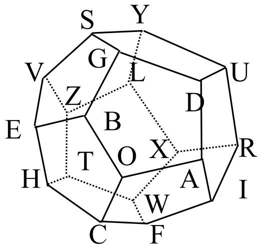
(2) $\dfrac{\left|\overrightarrow{PA}\right|}{\cos A}=\dfrac{\left|\overrightarrow{PB}\right|}{\cos B}=\dfrac{\left|\overrightarrow{PC}\right|}{\cos C}$ が成り立つことを示せ。

(3) 三角形 ABC の３辺 BC，CA，AB の長さが，それぞれ６，６，４であるとき
(3) の等式を用いて，線分 PA，PB，PC の長さを求めよ。

（問題２７）
正十二面体は互いに合同な１２個の正五角形を面とする多面体である。その２０個の頂点は１つの球（外接球）上にある。

１辺の長さが１の正十二面体の各頂点に図のように名前を付け，$\vec{a}=\overrightarrow{OA},\vec{b}=\overrightarrow{OB},\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。

ただし，$\cos\dfrac{3}{5}\pi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ である。



(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OD}=k\vec{a}+\vec{b}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表し，$\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}$ は互いに直交することを証明せよ。

(4) 多面体 ODSE－FRLT の名称を述べ，この正十二面体の外接球の直径を求めよ。

（問題１）

(1) $\cos\theta+\cos^2\theta=1$ のとき，$\cos\theta, \sin^2\theta+2\sin^4\theta$ を求めよ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}$ を求めよ。

（問題２）

a を実数とし，関数 $f(x)=\sin 2x+2a(\sin x-\cos x)+a^3 (0^\circ \le x \le 180^\circ)$ を考える。

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$g(t)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ。

(3) 関数 $y=m(a)$ のグラフを書け。

（問題３）

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおく。$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ のとき，t の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の取りうる値の範囲を求めよ。

（問題４）

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ を t で表せ。

(2) $0 \le \theta \le \pi$ のとき，t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \le \theta \le \pi$ のとき，θ の方程式 $2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)-k=0$ の解の個数を

定数 k が次の３つの値のときについて調べよ。

$k=1, k=1-2\sqrt{2}, k=-1$

（問題５）

関数 $f(\theta)=6\sin\theta\cos\theta-8\sin^3\theta\cos\varpi+2\cos^2\theta-1$ について

(1) $\sin 2\theta+\cos 2\theta=t$ とおくとき，t の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(\theta)$ を t を用いて表せ。

(3) $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

（問題６）

$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}, \sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

(2) 一般に，次の式が成り立つことを示せ。

$\cos 2x+\cos 2y=2\cos(x+y)\cos(x-y)$

(3) $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。

（問題７）

$0\leq\theta\leq\pi$ として，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+\frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$ と定める。

x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1) θ が $\cos\theta\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に, $m(\theta)$ が最小となる θ を求めよ。

(2) $m(\theta)$ が最小となる θ の値と，そのときの最小値を求めよ。

（問題８）

$0\leq x\leq\pi$ の範囲で，$\cos x+\sin 4x=0$ の解はいくつあるか。

（問題１）

a, b, c は正の整数であり，$a^2 b$ は 7 桁の整数。$\dfrac{b^2}{c^8}$ は小数で表すと小数第 10 位に初めて 0 でない数が現れる数である。このとき，ac^2 は何桁の整数であるか求めよ。

$\dfrac{ab\sqrt{b}}{c^4}$ は小数で表すと小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか求めよ。

（問題２）

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数であるかどうか調べよ。

（問題１）

数列$\{a_n\}$は初項 2,公比rの等比数列で，初項から第 10 項までの積が2^{20}である。

$r>0$とする。

(1) $\log_2 r$を求めよ。

(2) a_nの値が初めて2^{100}より大きくなるnの値を求めよ。

（問題２）

(1) $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)}\,(n\geq2)$を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^3}<\dfrac{5}{4}$が成立することを示せ。

（問題３）

数列$\{x_i\}$が漸化式$x_{i+1}=\dfrac{x_i^2+1}{2}$を満たしている。

(1) 全ての自然数iに対して$x_{i+1}\geq x_i$が成立することを示せ。

(2) $|x_i|\leq1$のとき，全ての自然数iに対して$x_i\leq1$であることを示せ。

(3) 自然数nに対して，等式$x_{i+1}-x_i=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2$が成立することを示せ。

(4) $|x_i|\leq1$のとき，$x_{i+1}-x_i=\dfrac{n}{2}(x_i-1)^2$が成立することを示せ。

(5) 初項x_1の値に応じて数列$\{x_i\}$の収束，発散について調べ収束するときは極限値を求めよ。

（問題４）

次の関係式で定められている数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$a_1=4, a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$

（問題５）

数列$\{a_n\}$が次の条件を満たしている。

$$\begin{cases} a_1 = 99900 \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n \geq 2) \end{cases}$$

のとき，a_{999}を求めよ。

（問題６）

正の実数からなる数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとおく。数列$\{a_n\}$が

$2S_n = a_n^2 + n(n = 1,2,3,\cdots)$を満たすとき

(1) a_1を求めよ。

(2) a_1, a_2, a_3を求めよ。

(3) a_nを予想し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

（問題７）

rは実数の定数とし，$r \neq 1$とする。数列$\{a_n\},\{b_n\}$は初項$a_1 = 1, b_1 = 0$で,全ての正の整数nに対して次の関係を満たす。

$$a_{n+1} = \frac{r}{2}a_n - \frac{r}{2}b_n, b_{n+1} = \left(1 - \frac{r}{2}\right)a_n + \left(1 + \frac{r}{2}\right)b_n$$

(1) $v_n = a_n + b_n$とする。数列$\{v_n\}$の第n項を求めよ。

(2) $w_n = a_n - b_n$とする。数列$\{w_n\}$の第n項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\},\{b_n\}$の第n項をそれぞれ求めよ。

（問題８）

p, qは正の有理数で$\sqrt{q}$は無理数であるとする。自然数nに対し，有理数a_n, b_nを次によって定める。

(1) $\left(p - \sqrt{q}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{q}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示せ。

（問題９）

第 3 項が 8，第 10 項が 29 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とするとき

(1) a と d の値を求めよ。

(2) 和 $2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$ を n の式で表せ。

(3) 200 以下の a_n のうち偶数であるものの和を求めよ。

（問題１０）

$a>0$ とする。項数 3 の 2 つの有限数列 $4,a,b,$ および $b,c,36$ はともに等比数列であり a,b,c

は等差数列である。このとき a,b,c の値を求めよ。

（問題１１）

次の有限数列について以下の問いに答えよ。

$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots(*)$

(1) 数列 $(*)$ の $\frac{37}{50}$ は第何項になるか

(2) 数列 $(*)$ の第 1000 項の数を求めよ。

(3) 初項から第 1000 項までの和を求めよ。

（問題１２）

n を正の整数とする。

$x+y+z\le n,-x+y-z\le n,x-y-z\le n,-x+-y+z\le n$ であるとき

点 $P(x,y,z)$ で x,y,z が整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。$f(n)$ を求めよ。

（問題１３）

$f(x)=1-2\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$ とする。ただし，$[x]$ はガウス記号で x を超えない最大の整数である。

(1) $y=f(x)$ のグラフを書け。

(2) 数直線上で，動点 P が x_0 から出発して， $x_1=f(x_0), x_2=f(x_1), \cdots, x_n=f(x_{n-1}), \cdots$ という関係で移動を繰り返すとき

（ア） $x_0=\dfrac{1}{3}$ のとき， x_1, x_2, x_3 の値を求めよ。

（イ）動点 P の座標 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ に対し， $n \geq 2$ のとき, $x_n=f(2^{n-1}x_0)$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

（ウ）動点 P が，異なる２点間を往復運動している場合，その２点を求めよ。

（問題１）

曲線 $y=x^2-x$ と２直線 $y=mx, y=nx$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{37}{6}$ ちなるように整数 m,n を定めよ。ただし $m>n>0$ とする。

（問題２）

関数 $F(x)=\int_0^x(at^2+bt+c)dt+d$ が極大値 $\dfrac{17}{3}, x=3$ で極小値 -5 をとるとき定数 a,b,c,d の値を求めよ。

（問題３）

関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)dt+2\int_1^x f'(t)dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は２次関数であることを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

（問題４）

$f(x)=ax^2+bx+c$ とし，２つの曲線 $y=f(x)$ と $y=-x^2+1$ は点 $(1,0)$ で共通接線を持つ。

(1) a,b を c を用いて表せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が 1 以外の解 α をもつとき， a を c を用いて表せ。

(3) (2)と同じ仮定のもとで， $\int_\alpha^1\left\{f(x)-x^2+1\right\}dx=0$ となるような c の値を求めよ。

（問題５）

多項式 $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ が任意の２次以下の多項式 $g(x)$ に対して $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ を満たすとき， α,β,γ の値を求めよ。

（問題６）

x^{100} を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ。