

基礎解析

1. 数列

【等差数列】

初項 a 公差 d の等差数列の一般項

$$a_n = a + d(n-1)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2} = \frac{(\text{項数}) \times \{\text{初項} + \text{末項}\}}{2}$$

【等比数列】

初項 a 公比 r ($|r| < 1$) の等比数列の一般項

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

n : 項数

【階差数列】

$$a_{n+1} - a_n = b_n$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

【調和数列】

逆数が等差数列。

(例題 1)

$m \neq n$ とする。ある調和数列の第 m 項が n^2 , 第 n 項が m^2

であるとき, 第 $m+n$ 項を求めよ。

$$\frac{1}{a_m} = a + (m-1)d = n^2$$

$$\frac{1}{a_n} = a + (n-1)d = m^2$$

$$\frac{1}{a_{m+n}} = a + (m+n-1)d = n^2 + m^2 - a + d$$

$$m = n = 1$$

$$\frac{1}{a_1} = a = 1$$

$$m = n = 2$$

$$\frac{1}{a_2} = 2 + d = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\frac{1}{a_{m+n}} = a + (m+n-1)d = 2 + (m+n-1)2 = 2(m+n)$$

ゆえに

$$a_{m+n} = \frac{1}{2(m+n)}$$

【漸化式】

1. 隣接2項

$$a_{n+1} = ba_n + c$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ とおく。}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, a_{n+1} も a_n も同じ値 α に近づく。

α は与式の a_{n+1}, a_n に α を代入した方程式

$\alpha = b\alpha + c$ の解。

$$a_{n+1} - \alpha = b(a_n - \alpha)$$

(例題1)

$a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n + 3$ の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$\alpha = 4\alpha + 3$$

$$\alpha = -1$$

$$a_{n+1} + 1 = 4(a_n + 1)$$

$$a_n + 1 = 4^{n-1}(a_1 + 1) = 4^{n-1}(1 + 1) = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_n = 2 \cdot 4^{n-1} - 1$$

2. 隣接3項

$$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$$

$px^2 + qx + r = 0$ の2解を α, β とおくと

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = \cdots \\ a_{n+1} - \beta a_n = \cdots \end{cases}$$

2式の差より

$(-\alpha + \beta)a_n = \cdots$ の形にもちこめる。

(例題2)

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{1}{3}(2a_{n+1} + a_n)$ の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$$

$$3x^2 - 2x - x = 0$$

$$(3x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}, 1$$

$$\begin{cases} a_{n+2} + \frac{1}{3}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n \\ a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

$$a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n = a_2 + \frac{1}{3}a_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (a_2 - a_1) = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

2式の差より

$$\frac{4}{3}a_n = \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(例題3)

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(解法のテクニック)
逆数をとる。

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{a_n} = 1 + \frac{3}{a_n}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

$$b_{n+1} = 3b_n + 1$$

$$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \left(b_n + \frac{1}{2} \right)$$

$$b_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1} \left(b_1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

$$b_n = \frac{1}{2} (3^n - 1)$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3^n - 1}$$

3. 連立漸化式

(例題1)

$$b_1 = 1, b_2 = 2$$

$$\begin{cases} a_n + b_n = 3a_{n-1} + 9b_{n-1} \\ a_n - b_n = -3a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases}$$

$$2a_n = 12b_{n-1} \Rightarrow a_n = 6b_{n-1}$$

$$6b_{n-1} + b_n = 3 \cdot 6b_{n-2} + 9b_{n-1}$$

$$b_n - 3b_{n-1} - 18b_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x-6)(x+3) = 0$$

$$x = 6, -3$$

$$b_n - 6b_{n-1} = -3(b_{n-1} - 6b_{n-2})$$

$$b_n + 3b_{n-1} = 6(b_{n-1} + 3b_{n-2})$$

$$b_n - 6b_{n-1} = (-3)^{n-2}(b_2 - 6b_1)$$

$$b_n + 3b_{n-1} = 6^{n-2}(b_2 + 3b_1)$$

$$9b_{n-1} = \{6^{n-2}(b_2 + 3b_1) - (-3)^{n-2}(b_2 - 6b_1)\}$$

$$9b_{n-1} = \{5 \cdot 6^{n-2} + 4(-3)^{n-2}\}$$

$$b_n = \frac{5 \cdot 6^{n-1} + 4(-3)^{n-1}}{9}$$

$$a_n = 6b_{n-1} = \frac{2}{3} \{5 \cdot 6^{n-2} + 4(-3)^{n-2}\}$$

(例題 2)

$$a_1 = 2, b_1 = 1$$

$$\begin{cases} 3a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \\ a_{n+1} + 3b_{n+1} = 6a_n + 4b_n \end{cases}$$

$$4(a_{n+1} + b_{n+1}) = 10(a_n + b_n)$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{5}{2}(a_n + b_n)$$

$$a_n + b_n = \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} (a_1 + b_1) = 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

$$2(a_{n+1} - b_{n+1}) = -2(a_n - b_n)$$

$$a_n - b_n = (-1)^{n-1} (a_1 - b_1) = (-1)^{n-1} (2 - 1) = (-1)^{n-1}$$

$$2a_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + (-1)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

$$2b_n = 3\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - (-1)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

【 $\sum$ の計算公式】

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

〔証明〕

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)k - k(k-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + \cdots + n(n+1)] = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)(k+1)k - (2k-1)k(k-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6} [3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot 2 + \cdots + (2n+1)(n+1)n] = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^2 k^2 - k^2 (k-1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} [2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 1 - 3^2 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1)^2 n^2] = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)\end{aligned}$$

$$S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots + nr^n$$

$$rS_n = r^2 + 2r^3 + 3r^4 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1}$$

$$(1-r)S_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n - nr^{n+1} = \frac{r(1-r^n)}{1-r} - nr^{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{r(1-r^n)}{(1-r)^2} - \frac{nr^{n+1}}{1-r}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ が収束する。} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(注意) 逆は成り立たない。

[証明]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \alpha$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha - \alpha = 0$$

(例題 3)

次の数列の第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \dots$$

(解答)

$$a_n = (-1)^{n-1} (2n-1) \times \frac{1}{2^{n-1}} = (2n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - \dots$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} + \frac{7}{16} - \dots$$

$$\frac{3}{2}S = S - \left(-\frac{1}{2}S\right) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots$$

$$\frac{3}{2}S \text{ は初項 } \frac{1}{2} \text{ 公比 } -\frac{1}{2} \text{ の等比数列の和}$$

$$\frac{3}{2}S = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\text{ゆえに } S_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}$$

【数学的帰納法】

① $n=1$ のとき成り立つことを示す。

② $n=k$ のとき成り立てば、 $n=k+1$ のときも成り立つことを示す。

(例題 1)

n を自然数とするとき

$3^{n+1} + 4^{2n-1}$ は 13 で割り切れることを示せ。

(解答)

$$n = k$$

$$3^{k+1} + 4^{2k-1} = 13m$$

$$n = k + 1$$

$$3^{k+2} + 4^{2(k+1)-1} = 3 \cdot 3^{k+1} + 16 \cdot 4^{2k-1}$$

$$= 3 \cdot (13m - 4^{2k-1}) + 16 \cdot 4^{2k-1}$$

$$= 3 \cdot 13m + 13 \cdot 4^{2k-1}$$

$$= 13(3m + 4^{2k-1})$$

より、 $n = k + 1$ のときも 13 で割り切れる。

2. 三角関数

- 三角関数の合成

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[証明]

$$\sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$$

3. 常用対数

(例題 1)

(1) 対数表を用いずに,

$$0.3 < \log_{10} 2 < 0.4$$

であることを示せ。

(2)

$$\log_{10} 3$$

の値の小数第1位はいくらか。

(1)

$$0.3 < \log_{10} 2 < 0.4 \Leftrightarrow 3 \log_{10} 10 < 10 \log_{10} 2 < 4 \log_{10} 10$$

$$\Leftrightarrow 10^3 < 2^{10} < 10^4$$

$$10^3 = 1000, 10^4 = 10000, 2^{10} = 1024$$

(2)

$$\log_{10} 3$$

の小数第1位はいくらか。

$$\frac{a}{10} \leq \log_{10} 3 < \frac{a+1}{10} \text{ とおく。}$$

$$a \leq \log_{10} 3^{10} < a+1$$

$$10^a \leq 3^{10} < 10^{a+1}$$

$$10^a \leq 59049 < 10^{a+1}$$

$$\therefore a = 4$$

4.軌跡と領域

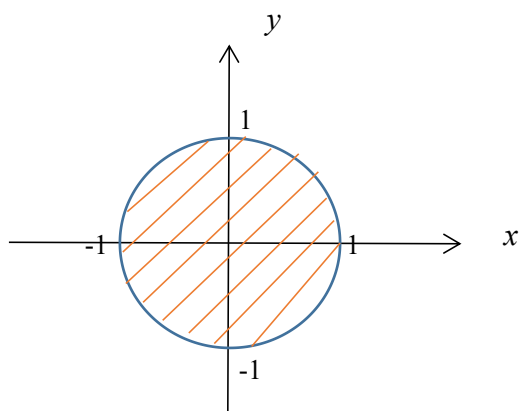
(例題 1)

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

[指針]

①円： $x^2 + y^2 = 1$ を描く

②円の内部か、外部かを調べる。



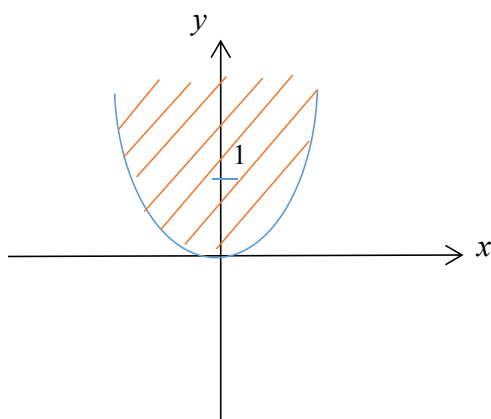
$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow 0^2 + 0^2 \leq 1$$

より、 $(0, 0)$ を含む円の内部の領域

(境界線含む)

(例題 2)

$$y \geq x^2$$

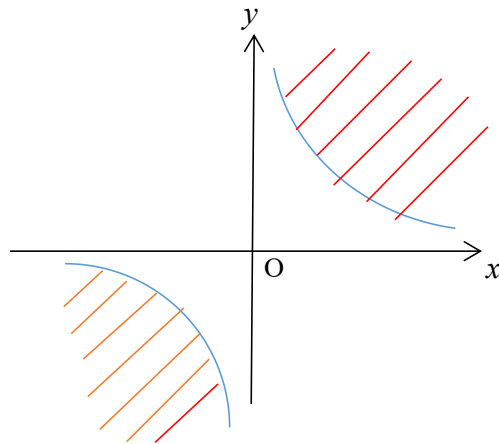


$$(x, y) = (0, 1) \Rightarrow 1 \geq 0^2$$

より点 $(0, 1)$ を満たす領域

(例題 3)

$$y > \frac{1}{x}$$



$$(x, y) = (0, 0) \Rightarrow xy < 1 \text{ より}$$

$xy > 1$ は、原点を含まない領域。

(例題 4)

双曲線 $y = \frac{3x-4}{x-2}$ は、双曲線 $y = \frac{a}{x}$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に b だけ平行移動したものである。

る。 a, b の値を求めよ。

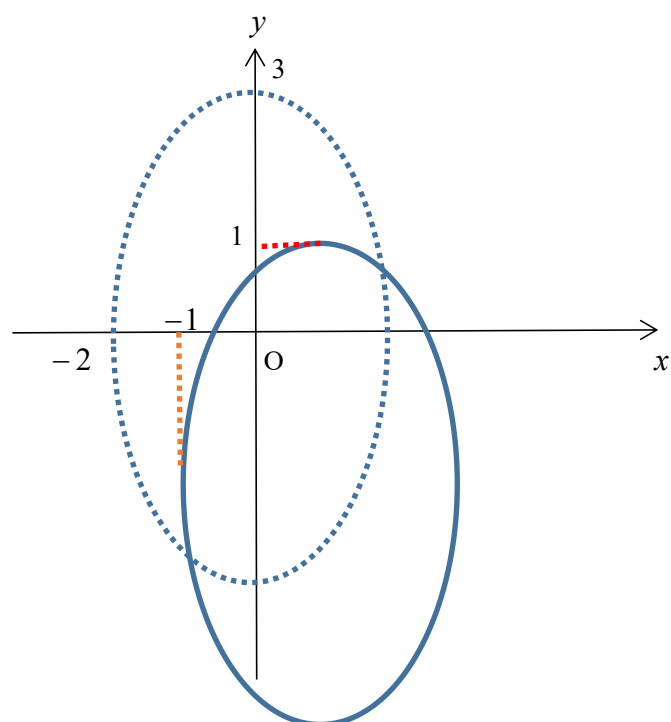
$$y = \frac{3x-4}{x-2} = \frac{3x-6+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 3$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

(例題 5)

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \text{ のグラフを図示せよ。}$$

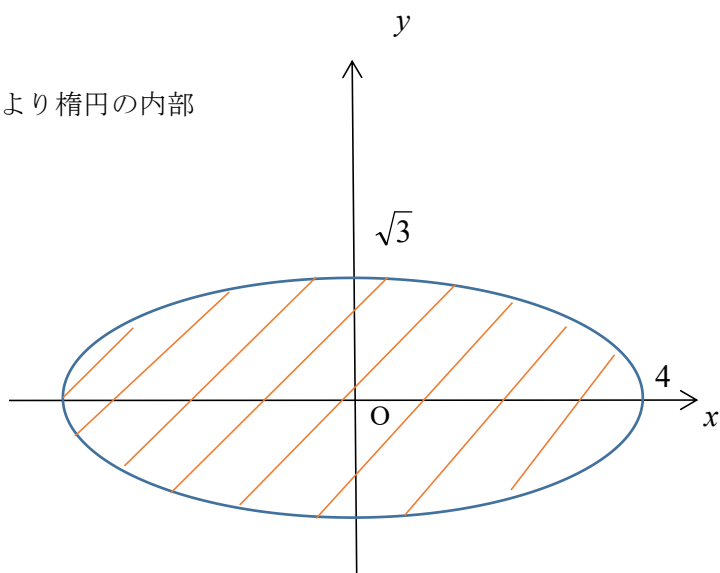
楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を x 軸方向に +1, y 軸方向に -2 平行移動。



(例題 6)

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} \leq 1$ で表される領域を図示せよ。

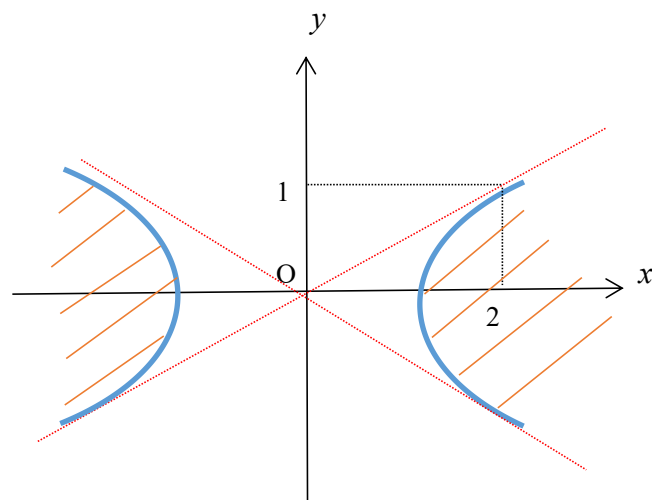
$\frac{0}{16} + \frac{0}{3} \leq 1$ より楕円の内部



(例題 7)

$$\frac{x^2}{4} - y^2 \geq 1$$

$\frac{0}{4} - 0 = 0$ より双曲線の原点を含まない領域。



5. 連立方程式

n 個の変数の連立方程式は 1 次独立な n 個の方程式があれば解が定まる。

例 1)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$y + z = 2 \Rightarrow 3y + 3z = 6$$

$$3y + 4z = 5$$

$$\therefore z = -1, y = 3, x = 1$$

例 2)

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 3y + 3z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

← 1 次独立でない

代数・幾何

1. 媒介変数 (パラメーター)

(例題 1)

t を媒介変数とする。次の式の表す曲線はどのような図形か。

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + 3 \end{cases}$$

$$t = y - 3$$

$$x = (y - 3)^2 - 2(y - 3)$$

$$= y^2 - 6y + 9 - 2y + 6$$

$$= y^2 - 8y + 15$$

$$2 \text{ 次関数 } x = y^2 - 8y + 15$$

(例題 2)

θ を媒介変数とする。次の式の表す曲線はどのような図形か。

$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta + 2 \\ y = 2 \sin \theta - 1 \end{cases}$$

$$\cos \theta = \frac{(x - 2)}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{(y + 1)}{2}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$$

楕円；長軸 3，短軸 2 の楕円を x 軸方向に 2， y 軸方向に -1 平行移動。

2. 空間図形

【直線の方程式】

点 (a, b, c) を通り $\vec{u} = (l, m, n)$ に平行な直線の方程式

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$$

ベクトル方程式

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

【平面の方程式】

点 (a, b, c) を通り法線ベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ の平面の方程式

$$p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0$$

ベクトル方程式

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0, \vec{a} = (a, b, c)$$

【1つの直線を含む平面の方程式】

直線 $l: 1-x = y+1 = \frac{z-2}{4}$ を含む平面の方程式は

$$l \text{ は } x+y=0, 4y-z+6=0$$

の交線であるから

$$x+y+k(4y-z+6)=0$$

と表される。

【球の接平面の方程式】

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

上の点 (x_1, y_1, z_1) の接平面の方程式

$$x_1x + y_1y + z_1z = r^2$$

【平面や直線のなす角】

平面の法線ベクトルと直線の方角ベクトルのなす角を調べる。

(例題1)

$$\text{直線 } \frac{x-2}{3} = \frac{y+6}{4} = z-1$$

を含む平面の方程式を求めよ。

直線を含む平面の求め方

$$\begin{cases} 4x-3y-26=0 \\ x-3z+1=0 \end{cases} \text{ の交線を含む平面とみなす。}$$

$$4x-3y-26+k(x-3z+1)=0$$

(例題 2)

点 $O(3,3,0)$ を中心とし、かつ直線 $l: x=1+2t, y=2+2t, z=t$ に接する球面の方程式を求めよ。

直線 l 上の点は $P(1,2,0)+t(2,2,1)$

$$OP \perp l$$

$$\text{より } \overrightarrow{OP} \cdot (2,2,1) = 0$$

$$\overrightarrow{OP} = t(2,2,1) + (1,2,0) - (3,3,0)$$

$$= t(2,2,1) + (-2,-1,0)$$

$$= (2t-2, 2t-1, t)$$

$$(2t-2) \cdot 2 + (2t-1) \cdot 2 + t \cdot 1 = 0$$

$$9t - 6 = 0$$

$$t = \frac{2}{3}$$

$$(1,2,0) + \frac{2}{3}(2,2,1) = \left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$r^2 = \left(\frac{7}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4+1+4}{9} = 1$$

$$\text{ゆえに } (x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 1$$

【コーシーの不等式】

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ を証明せよ。

[証明]

任意の実数 t に関して、次式が成り立つ。

$$(at - x)^2 + (bt - y)^2 \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)t^2 - 2(ax + by)t + (x^2 + y^2) \geq 0$$

$$a^2 + b^2 > 0$$

$$\frac{D}{4} = (ax + by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

[ベクトルを用いた証明]

$$\vec{a} = (a, b), \vec{x} = (x, y)$$

$$|\vec{a}|^2 = (a^2 + b^2), |\vec{x}|^2 = (x^2 + y^2), \vec{a} \cdot \vec{x} = (ax + by)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos \theta$$

$$|\vec{a}| |\vec{x}| \geq \vec{a} \cdot \vec{x}$$

$$|\vec{a}|^2 |\vec{x}|^2 \geq (\vec{a} \cdot \vec{x})^2$$

ゆえに

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

3. 行列

(例題 1)

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p+q \neq 2 \text{ のとき, } x_n, y_n \text{ を } p, q \text{ を用いて表せ。}$$

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix}$$

固有方程式は

$$(p-k)(q-k) - (1-q)(1-p) = 0$$

$$k^2 - (p+q)k + p+q-1 = 0$$

$$(k - (p+q-1))(k-1) = 0$$

$$k = 1, p+q-1$$

固有値は $1, p+q-1$

固有値 1 の固有ベクトルは

$$A - E = \begin{pmatrix} p-1 & 1-q \\ 1-p & q-1 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \end{pmatrix}$$

固有値 $p+q-1$ の固有ベクトルは

$$A - (p+q-1)E = \begin{pmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{pmatrix} - (p+q-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-q & 1-q \\ 1-p & 1-p \end{pmatrix} \text{より} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p+q-1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p+q-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p+q-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-q & 1 \\ 1-p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.1 次変換

(例題 1)

直線 $y = mx$ に関する対称移動を f とし, $m = \tan \theta$ とする。

f は, 原点の周りの $-\theta$ の回転, x 軸に関する対称移動, 原点の

周りの θ の回転を, 順次合成して得られる。

f を表す行列が $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ で表されることを証明せよ。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

【3次元回転移動】

・ x 軸周り θ 回転移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

・ y 軸周り θ 回転移動

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

・ z 軸周り θ 回転移動

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$