

(問題 3 4 9)

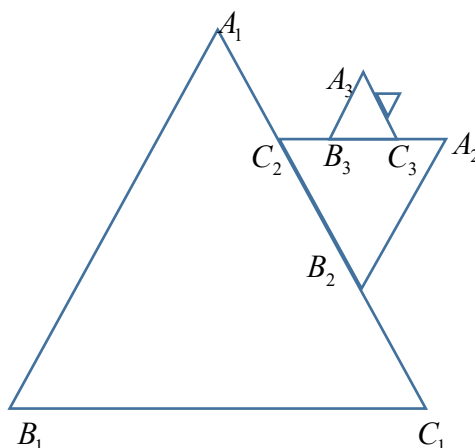
$$A_1(0,1), B_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ を}$$

頂点とする正三角形 $A_1B_1C_1$ を考える。

辺 A_1C_1 の 3 等分点を A_1 に近いほうから

C_2, B_2 とし，正三角形 $A_1B_1C_1$ の外側に

正三角形 $A_2B_2C_2$ をとる。次に辺 A_2C_2



の 3 等分点を A_2 に近いほうから C_3, B_3 とし，正三角形 $A_2B_2C_2$ の外側に正三角形 $A_3B_3C_3$ を

とる。一般に，辺 A_kC_k の 3 等分点を A_k に近い方から C_{k+1}, B_{k+1} とし，正三角形 $A_kB_kC_k$ の外

側に正三角形 $A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ をとる。

(1) 正三角形 $A_kB_kC_k$ の面積を a_k とし， $S_n = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_k$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

(2) 正三角形 $A_kB_kC_k$ の重心 O_k の座標を (p_k, q_k) とする。 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k, \lim_{k \rightarrow \infty} q_k$ を求めよ。

(問題 3 5 0)

n を正の整数とするととき，2つの曲線 $y = \frac{x^2}{n}, y = \sqrt{nx}$ で囲まれる部分の面積を S_n とし，そ

の内部の点 (x, y) で x と y がともに整数であるような点の個数を T_n とする。ただし，周上の点は数えないものとする。

(1) S_n を n で表せ。

(2) n 以下の任意の正の整数 k に対して， $0 < y \leq \frac{k^2}{n}$ を満たす整数 y の個数を X_k とする。

不等式 $\frac{k^2}{n} - 1 < X_k \leq \frac{k^2}{n}$ を用いて，極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n X_k$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

(問題 3 5 1)

正の整数 n に対して $k(1 \leq k \leq n)$ を $1 \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n}$ が成り立つような最大の整数とする。

(1) $n = 7$ のとき k を求めよ。また、 $n \geq 4$ ならば $k \geq 2$ となることを示せ。

(2) $n \geq 4$ のとき不等式 $\log \frac{n+1}{k+1} < 1 < \log \frac{n}{k-1}$ が成り立つことを示せ。ただし、 $\log$ は自然対数とする

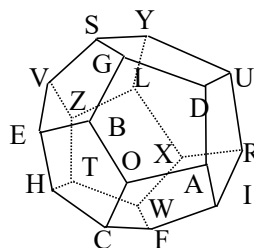
(3) (2)を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$ を求めよ。

(問題 3 5 2)

正十二面体は互いに合同な 12 個の正五角形を面とする多面体である。その 20 個の頂点は 1 つの球 (外接球) 上にある。

1 辺の長さが 1 の正十二面体の各頂点に図のように名前を付け、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。

ただし、 $\cos \frac{3}{5}\pi = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ である。



(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OD} = k\vec{a} + \vec{b}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表し、 $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ は互いに直交することを証明せよ。

(4) 多面体 ODSE-FRLT の名称を述べ、この正十二面体の外接球の直径を求めよ。

(問題 3 5 3)

1 辺の長さが 2 の正四面体を ABCD とする。辺 BC の中点 O を原点とし、A を z 軸上の正の部分にとる。B, C, D の座標をそれぞれ $(-1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, \alpha, \beta)$ とする。(ただし、 $\alpha > 0$)

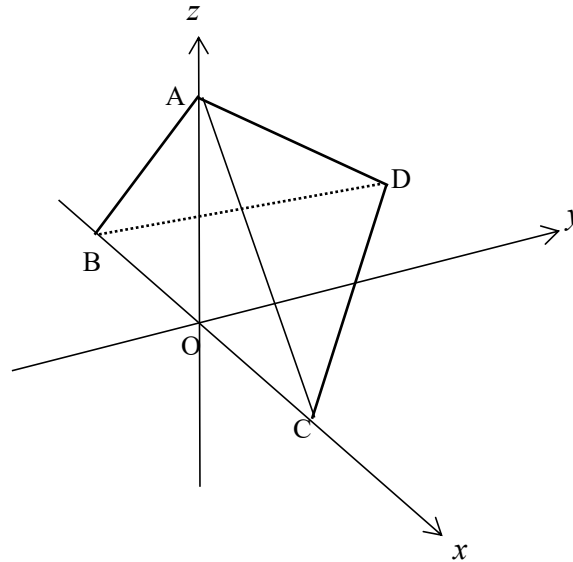
(1) α, β を求めよ。

(2) 平面 $z = h$ が辺 AC, 辺 CD および z 軸と交わる点をそれぞれ P, Q, R とする。 $PR > QR$ となる h の値の範囲を求めよ。

ただし、 $0 < h < \beta$ とする。

(3) 折れ線 CDA を z 軸の周りに回転して得られる曲面と xy 平面とで囲まれる立体の体積 V_1 を求めよ。

(4) 正四面体 ABCD を z 軸の周りに回転してできる立体の体積を V_2 とすると, $V_2 > V_1$ を示せ。



(問題 3 5 4)

平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。円周上に直径の両端でない相異なる 2 点 A, B をとり, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(1) A, B における円 C の接線の交点を P とし, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とおくととき,

$$\vec{p} = \frac{1}{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}} (\vec{a} + \vec{b}) \text{ を示せ。}$$

(2) この平面上の点 Q に対して, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とする。 $\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$ において $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を計算し, Q 直

線 AB 上にあるための必要十分条件が $\vec{p} \cdot \vec{q} = 1$ であることを示せ。

(3) 点 Q が円 C の外部で直線 AB 上にあるとき, Q から円 C に引いた 2 つの接線の接点を D, E とすると, P, D, E は一直線上にあることを示せ。

(問題 3 5 5)

数列 $\{a_n\}$ $a_1 = 10, a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$ の一般項とその極限を求めよ。

(問題 3 5 6)

数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{4-a_n}{3-a_n}$ の一般項とその極限を求めよ。

(問題 3 5 7)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ。

(問題 3 5 8)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ を求めよ。

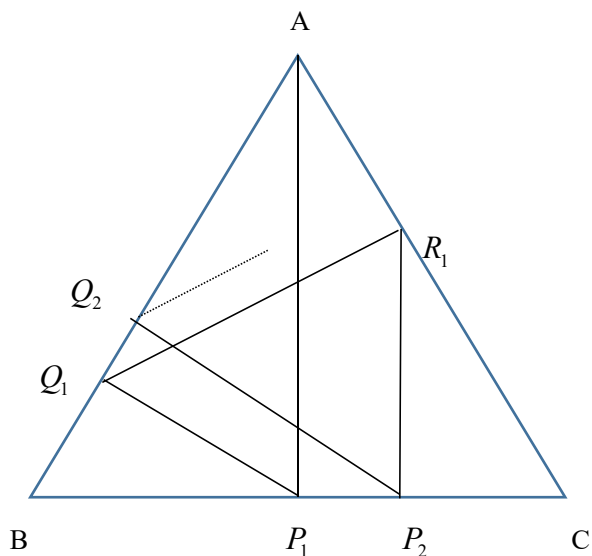
(問題 3 5 9)

図のような 1 辺の長さ a の正三角形 ABC において、頂点 A から辺 BC に下した垂線の足を P_1 とする。 P_1 から辺 AB に下した垂線の足を Q_1 、 Q_1 から辺 CA へ下した垂線の足を R_1 、 R_1 から辺 BC へ下した垂線の足を P_2 とする。このような操作を繰り返すと、辺 BC に点 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ が定まる。線分 BP_n の長さを x_n とするとき、数列 $\{x_n\}$ について次の問いに答えよ。

(1) x_{n+1} を x_n, a を用いて表せ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。



(問題 3 6 0)

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ の辺 OA , AC , OB , BC 上に, それぞれ P , Q , R , S を $AP = BR = t, AQ = BS = u$ となるようにとる。ただし, $0 < t < 1, 0 < u < 1$ である。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{QS}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および t, u を用いて表せ。

(2) $PQ = RS$ であることを示せ。

(3) $\angle PQS = \angle RSQ$ であることを示せ。

(問題 3 6 1)

放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{8}$ を時計回りに原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転した図形を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 直線 $x = a$ が C と接しているとき, a の値を求めよ。

(3) C と直線 $x = 1$ とで囲まれる図形を x 軸の周りに回転して得られる図形の体積 V を求めよ。

(問題 3 6 2)

不等式 $a(x^2 + x + 1) > x (a \neq 0)$ がある。

(1) すべての x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(2) この不等式を満たす x が存在するための a の値の範囲を求めよ。

(問題 3 6 3)

直線 $l: x - 1 = \frac{y + 1}{2} = -z$ と平面 $\alpha: 2x - y + z = 1$ 上の直線 m が交わっているとき

(1) m, l が直交するとき, m の方程式を求めよ。

(2) m, l のなす角を最小にする m の方程式を求めよ。

(問題 3 6 4)

xyz 空間において、 yz 平面上の放物線 $z = y^2$ を z 軸の周りに回転してできる曲面と平面 $z = y$ で囲まれた立体を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 平面 $y = t$ (ただし、 $0 \leq t \leq 1$) で D を切ったときの切り口の面積を $S(t)$ とするとき、

$$S(t) = \frac{4}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}} \text{ となることを示せ。}$$

(2) $t = \sin^2 \theta$ とおけば、 $\int_0^1 S(t) dt = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2\theta) d\theta$ となることを示せ。

(3) 立体 D の体積を求めよ。

(問題 3 6 5)

(1) 関数 $f(x)$ はすべての正の実数に対して定義され、任意の正の実数 s, t に対して

$$\frac{f(s+t)}{s+t} \leq \frac{f(s)}{s} \text{ が成立するという。このとき、任意の正の実数 } s, t \text{ に対して}$$

$f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 任意の正の実数 a, b と任意の正の整数 n に対して、

$$\frac{a+b}{1+(a+b)^n} \leq \frac{a}{1+a^n} + \frac{b}{1+b^n} \text{ が成立することを証明せよ。}$$

(問題 3 6 6)

空間において、 $|\overrightarrow{OP}| = 2, \overrightarrow{OP}$ と $\vec{e}_3$ (z 軸の正の向きの単位ベクトル) とのなす角が 30° であるような動点 P があるとき

(1) 点 P はどのような図形上を動くか。

(2) 定点 $A(3, 4, 0)$ より直線 OP に下した垂線の長さが最小となる P の座標を求めよ。

(問題 3 6 7)

関数 $f(x) = \frac{x+6}{\sqrt{x^2+4}}$ の最大値を求めたい。ただし、 $0 \leq x \leq 2$ とする。

(1) $x = 2 \tan \theta$ とおき、 $f(x) = a \sin \theta + b \cos \theta$ の形で表すときの、 a, b の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値と、そのときの $\tan \theta$ の値を求めよ。

(問題 3 6 8)

行列 A について $A^2 - \sqrt{2}A + 2E = O$ が成り立つとする。

(1) 行列 $B = xA + yE$ が $B^2 - \sqrt{2}B + 2E = O$ を満たすように、実数 x, y の値を定めよ。

(2) (1)の行列 $B = xA + yE$ に対して、 $A^{10} + 2xB^8$ を求めよ。

(問題 3 6 9)

点 $P(a, b, c)$ を通り、ベクトル $\vec{u} = (1, 1, 2)$ に平行な直線を l とする。

また、方程式 $x + y + z = 10$ で定められる平面を π とする。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と π の交点 Q の座標を求めよ。

(3) 点 P は x 軸上を動くとする。このとき、交点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

(4) 点 P が $x = 2y = 3z$ で定められる直線上を動くとする。このとき、交点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

(問題 3 7 0)

次の極限を求めよ。

$$2^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-4} \sum_{k=1}^n k^3$$

(問題 3 7 1)

$f(x)$ は 3 次式で、 $\lim_{x \rightarrow 2\alpha} \frac{f(x)}{x - 2\alpha} = \lim_{x \rightarrow 4\alpha} \frac{f(x)}{x - 4\alpha} = 1$ とする。ただし、 α は 0

でない定数とする。このとき、 $\lim_{x \rightarrow 3\alpha} \frac{f(x)}{x - 3\alpha}$ の値を求めよ。

(問題 3 7 2)

$\int_0^1 x\sqrt{x^4+1}dx$ を求めよ。

(問題 3 7 3)

$\int_0^1 \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよ。

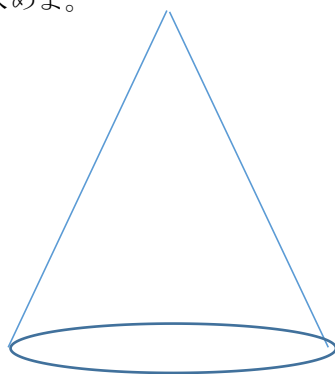
(問題 3 7 4)

三角形 ABC のにおいて, $AB=3+t, BC=4, AC=5-t$ である。

- (1) t の範囲を表せ。
- (2) $\sin A$ を t で表せ。
- (3) 三角形 ABC の面積の最大値を求めよ。

(問題 3 7 5)

- (1) 周の長さが一定である二等辺三角形のうち, その面積が最大となるものは正三角形であることを証明せよ。
- (2) 底面の半径 r , 高さ h の円錐に, 底面が正方形である直方体が内接しているとき, 直方体の体積の最大値を求めよ。



(問題 3 7 6)

四面体 $2x+y-z \geq -1, x-2y-z \leq -1, x-y+2z \geq 1, 2x+y+z \leq 2$ について

- (1) 2 平面 $2x+y-z=-1, x-2y-z=-1$ の交線を含み, この四面体の体積を 2 等分する平面の方程式を求めよ。
- (2) この四面体に内接する球の方程式を求めよ。
- (3) この四面体に外接する球の方程式を求めよ。

(問題 3 7 7)

2つの球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z - 7 = 0$ の交わりの円の半径, およびこの円の中心と原点との距離を求めよ。

(問題 3 7 8)

第1象限で x 軸に接する円 C が, 放物線 $y = x^2$ と点 $T(t, t^2)$ を共有し, この点 T で共通の接線を持つ。ただし, $t > 0$ とする。円 C の中心を $P(a, b)$ とし, 次の問いに答えよ。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 原点と点 P を結ぶ直線の傾き $\frac{b}{a}$ の, $t \rightarrow \infty$ としたときの極限値を求めよ。

(問題 3 7 9)

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, $\cos x + \sin 4x = 0$ の解はいくつあるか。

(問題 3 8 0)

正の数 x に対して, x の整数部分を $[x]$ と表す。

(1) すべての正の数 x に対して, 等式 $[x] + \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x]$ が成り立つことを示せ。

(2) n を自然数とすると $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^k} + \frac{1}{2} \right]$ の値を求めよ。

(問題 3 8 1)

1 次変換 f は, 放物線 $C: y = x^2 - x + \frac{1}{2}$ をそれ自身に移すものとする。

ただし, f は恒等変換ではないとする。

(1) f を表す行列を求めよ。

(2) O を原点, P を C 上の任意の点, Q を f による P の像とすると, $\angle POQ$ の最大値を求めよ。

(問題 3 8 2)

s を実数とし, 2 次の正方行列 A が $A^2 - sA + E = O$ を満たすとする。

(1) A は逆行列をもち、 $(A^{-1})^2 - sA^{-1} + E = O$ が成り立つことを示せ。

(2) $|s| \neq 2$ ならば、 $A - A^{-1}$ も逆行列をもつことを示せ。

(問題 3 8 3)

長さが 2,3,5,6,11 である 5 本の線分より 3 本を選ぶ。そのとき選んだ 3 本が、三角形となる確率を求めよ。

(問題 3 8 4)

8 個のりんごを 3 人に分けるとき、1 個ももらわない人があってもよいとすると、何通りの分け方があるか。

(問題 3 8 5)

サイコロを n 回振って、1 の目が少なくとも 1 回出る確率を 0.99 以上にしたい。このような最小の整数 n の値を求めよ。 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$

(問題 3 8 6)

袋の中へ赤球 4 個と白球を何個か入れておき、その中から 2 個の球を取り出す。ただし、どの球を取り出すのも同程度に確からしいとする。

(1) 取り出した球が 2 個とも白球である確率が $\frac{1}{3}$ であるようにするためには、袋の中に白球を何個入れておけばよいか。

(2) 赤球 1 個と白球 1 個を取り出す確率が最も大きくなるようにするためには、袋の中に白球を何個入れておけばよいか。

(問題 3 8 7)

0,1,2,3,...,9 の札が各 1 枚ある。これらを並べて 5 桁の数を並べるとき、

(1) 5 桁目が 1,2,3,4 のいずれかになる場合は何通りあるか。

(2) 56789 以下の 5 桁の数はいくつあるか。

(問題 3 8 8)

n 人 ($n \geq 4$) の学生がいる。

(1) n 人を 2 つの教室 A,B に配分する方法は、空の教室があるような配分も含めて、全部で $\square$ 通りある。このうち、どちらか一方の教室に n 人すべて配分する方法は $\square$ 通りあり、したがって、A,B どちらの教室に少なくとも 1 人の学生を配分する方法は $\square$ 通りである。

(2) 同様に、 n 人の学生を 3 つの教室 A,B,C に配分するとき、A,B,C のうち、1 つの教室は空で、残りの 2 つ教室には、どちらの教室にも少なくとも 1 人の学生が配分する方法は

エ 通りある。したがって、A,B,C の教室に少なくとも 1 人が含まれるように配分する方法はオ 通りある。更に、 n 人の学生を 4 つの教室 A,B,C,D に、どの教室にも少なくとも 1 人が含まれるように配分する方法はカ 通りある。

(問題 3 8 9)

$f(x) = 1 - 2 \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right|$ とする。ただし、 $[x]$ はガウス記号で x を超えない最大の整数である。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 数直線上で、動点 P が x_0 から出発して、 $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$ という関係で移動を繰り返すとき

(ア) $x_0 = \frac{1}{3}$ のとき、 x_1, x_2, x_3 の値を求めよ。

(イ) 動点 P の座標 $x_0, x_1, x_2, \dots$ に対し、 $n \geq 2$ のとき、 $x_n = f(2^{n-1}x_0)$ が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

(ウ) 動点 P が、異なる 2 点間を往復運動している場合、その 2 点を求めよ。

(問題 3 9 0)

n を 2 以上の自然数とする。 xy 座標平面上に、 $0 \leq x \leq 1$ で定義され、次式で与えられる 2 つの曲線 C_n, S_n がある。

$$C_n : \sqrt[n]{\pi} y = \sqrt[n]{x} \cos\left(\frac{\pi}{n} x\right), S_n : \sqrt[n]{\pi} y = \sqrt[n]{x} \sin\left(\frac{\pi}{n} x\right)$$

C_n と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V_n 、 S_n と x 軸と直線 $x=1$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を W_n とする。

(1) V_2 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_n + W_n)^n$ を求めよ。

(3) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sum_{k=2}^n V_k + \sum_{k=2}^n W_k < n + 3 - 2 \log(n + 3), (n \geq 2)$$

(問題 3 9 1)

xy 平面において, 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の上を速さ 1 で運動する点 P の時刻 t での座標を

$(x(t), y(t))$ とする。次の問に答えよ。

(1) 時刻 t での点 P の速度ベクトルと加速度ベクトルは直交することを示せ。

(2) 時刻 t での点 P の速度ベクトルとベクトル $\left(\frac{x(t)}{a^2}, \frac{y(t)}{b^2}\right)$ は直交することを示せ。

(3) 時刻 t での点 P の加速度ベクトルの大きさは $\frac{a^4 b^4}{\{b^4 x(t)^2 + a^4 y(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}$ となることを示せ。

(問題 3 9 2)

点 P, Q はそれぞれ直線 AB, CD 上を等速度 $\vec{u}, \vec{v}$ で進む。(出発点はそれぞれ A, C で O は AC の中点)

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OR} = \vec{x}$ (R は PQ を 1:2 に内分する点) として, R の軌跡をベクトル方程式で表せ。

(2) PQ の長さが最短となるときの, $\vec{x}$ を求めよ。

(問題 3 9 3)

次の各問に答えよ。

(1) $x > 0$ のとき, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ であることを証明せよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right\}$ を求めよ。

(問題 3 9 4)

x は 0 以外のすべての実数をとるものとする。

(1) $x + \frac{1}{x}$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) $x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ のとる値の範囲を求めよ。

(問題 3 9 5)

(1) 定積分 $I(a) = \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$ を計算せよ。ただし、 a は正の定数とする。

(2) 2 次曲線 $x^2 + 4y^2 - 24y + 20 = 0$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を、(1)の結果を用いて求めよ。

(問題 3 9 6)

$a_n = n \cos \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ とすると、

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ を求めよ。

(問題 3 9 7)

曲線 $y = \log x$ 上の x 座標が $1 + \frac{k}{n} (k = 1, 2, \dots, n)$ である点を P_k とする。点 $(1, 0)$ を A とし、

2 点 A, P_k 間の距離を $\overline{AP_k}$ とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) $\int \log(1+x) dx$ を求めよ。

(2) $\int \frac{\log(1+x)}{1+x} dx$ を求めよ。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n \overline{AP_k^2}$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

(問題 3 9 8)

定積分 $A = \int_0^1 \frac{1-t}{1-ct} dt$ と $a_n = \int_0^1 (1-t)(ct)^n dt (n = 0, 1, 2, \dots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について、

次の問いに答えよ。ただし、定数 c は $0 < c < 1$ とする。

(1) 不等式 $0 < A - \sum_{k=0}^n a_k < \frac{c^{n+1}}{1-c}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 定積分 A と a_n の値を求めよ。

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{n+1}}{n(n+1)}$ の値を求めよ。

(問題 3 9 9)

n を自然数, $k=1,2,\dots,n$ として, $x_k = \frac{k}{n}, I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{|\sin n\pi x|}{1+x^2} dx$ とおく。ただし $x_0 = 0$ である。

(1) $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ の範囲で, $\frac{1}{1+x_k^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x_{k-1}^2}$ を示せ。

(2) $\frac{2}{n\pi} \frac{1}{1+x_k^2} \leq I_k \leq \frac{2}{n\pi} \frac{1}{1+x_{k-1}^2}$ を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin n\pi x|}{1+x^2} dx$ を求めよ。

(問題 4 0 0)

数列 $\{a_n\}$ を $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = \frac{1}{n} (n = 2, 3, \dots)$ によって定義する。 $n \geq 2$ のとき次の(1),(2)が成り立つことを示せ。

(1) $a_n - a_{n-1} < 1 + \log n$

(2) $a_n < n + \log n!$