(問題２２０)

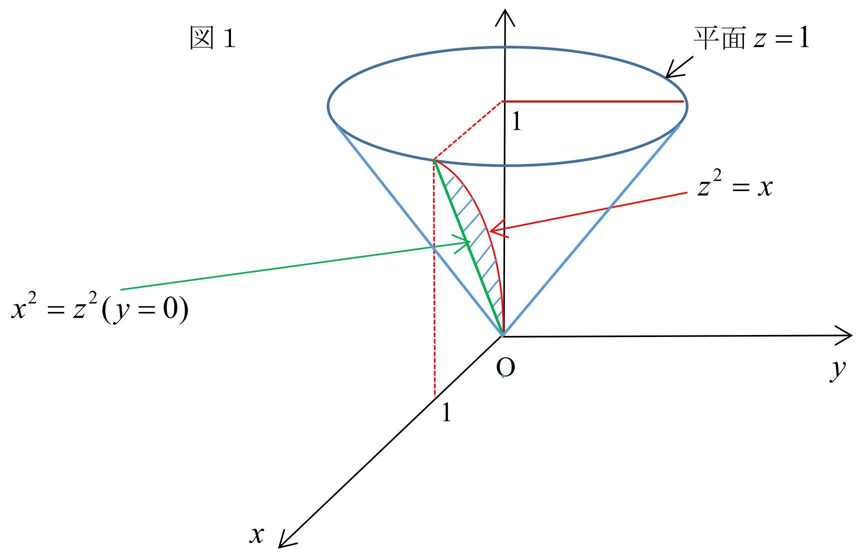
xyz 空間において条件 $x^2+y^2 \le z^2, z^2 \le x, 0 \le z \le 1$ を満たす点 $P(x,y,z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし，$0 \le k \le 1$ に対し，z 軸と直交する平面 $z=k$ による切り口の面積を $S(k)$ とする。

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき $S(k)$ を θ で表せ。ただし，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

(解答)

図１



(解法のテクニック)
空間図形の問題は実際に作図してイメージをつかむ。

(1)

$x^2+y^2=z^2$ より

$y=\pm\sqrt{z^2-x^2}$

$$S(k)=2\int_{k^2}^{k}\sqrt{k^2-x^2}\,dx$$
$$=2\int_{\cos^2\theta}^{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta-x^2}\,dx$$
$$x=\cos\theta\sin\alpha, dx=\cos\theta\cos\alpha d\alpha$$
$$x:\cos^2\theta\to\cos\theta$$
$$\sin\alpha=\cos\theta\Rightarrow\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$$
$$\sin\alpha=1\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha:\frac{\pi}{2}-\theta\to\frac{\pi}{2}$$

$$S(k)=2\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\alpha}\,\cos\theta\cos\alpha d\alpha$$
$$=\cos^2\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\alpha d\alpha$$
$$=\cos^2\theta\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}}1+\cos2\alpha d\alpha=\cos^2\theta\left[\alpha+\frac{\sin2\alpha}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin(\pi-2\alpha)=\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta\cos\pi\sin(-2\theta)$$
$$=\theta\cos^2\theta-\cos^3\theta\sin\theta$$

(2)

$$V=\int_0^1 S(k)dk$$

$$k=\cos\theta,\theta:\frac{\pi}{2}\to 0,dk=-\sin\theta d\theta$$

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)'-\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta d\theta$$

$$=\left[\theta\left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-\sin^2\theta)\cos\theta-\cos\theta(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta d\theta$$

$$\sin\theta=t,\cos\theta d\theta=dt,t:0\to 1$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t^2+t^4dt=\left[\frac{t}{3}-\frac{4}{9}t^3+\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{45}$$