

(問題 9 5)

n を正の整数とする。

$x + y + z \leq n, -x + y - z \leq n, x - y - z \leq n, -x - y + z \leq n$ であるとき、

点 $P(x, y, z)$ で x, y, z が整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。 $f(n)$ を求めよ。

(解答)

$$\begin{array}{r} x + y + z \leq n \\ +) -x + y - z \leq n \\ \hline 2y \leq 2n \end{array}$$

$$y \leq n$$

$$\begin{array}{r} x - y - z \leq n \\ +) x + y + z \leq n \\ \hline 2x \leq 2n \end{array}$$

$$x \leq n$$

$$\begin{array}{r} x + y + z \leq n \\ +) -x - y + z \leq n \\ \hline 2z \leq 2n \end{array}$$

$$z \leq n$$

$$\begin{array}{r} -x + y - z \leq n \\ +) x - y - z \leq n \\ \hline -2z \leq 2n \end{array}$$

$$z \geq -n$$

$$\begin{array}{r} -x + y - z \leq n \\ +) -x - y + z \leq n \\ \hline -2x \leq 2n \end{array}$$

$$x \geq -n$$

$$\begin{array}{r} x - y - z \leq n \\ +) -x - y + z \leq n \\ \hline -2y \leq 2n \end{array}$$

$$y \geq -n$$

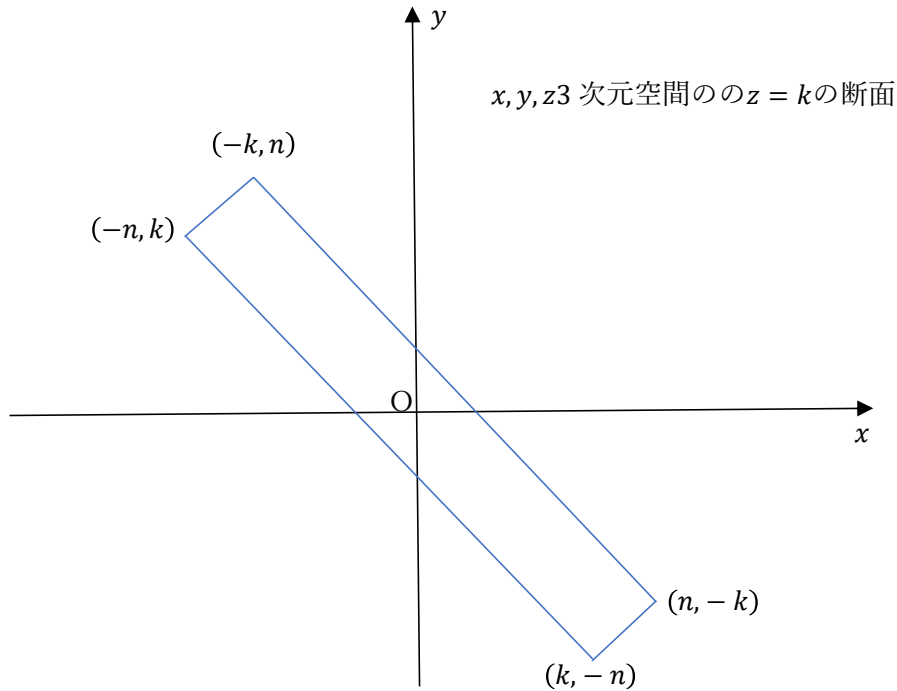
$z = k (-n \leq k \leq n)$ のとき

$$\begin{cases} x + y \leq n - k \\ -x + y \leq n + k \\ x - y \leq n + k \\ -x - y \leq n - k \end{cases}$$

点 (x, y) の存在する領域は x, y, z 次元空間の $z = k$ の断面の

4 点 $(-k, n), (-n, k), (n, -k), (k, -n)$ を格子とする

長方形の周または内部



この格子の数は $(n + k + 1)(n - k + 1)$ である。

$z = k (-n \leq k \leq n)$ より $k = 0$ のとき $(n + 1)^2$ と $1 \leq k$

$\leq n$ の場合の 2 倍を足せばよい。(格子は z の正と負で対象)

$$\begin{aligned}
 f(n) &= (n + 1)^2 + 2 \sum_{k=1}^n (n + k + 1)(n - k + 1) \\
 &= (n + 1)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \{(n + 1)^2 - k^2\} \\
 &= (n + 1)^2 + 2n(n + 1)^2 - 2 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\
 &= (n + 1) \left\{ n + 1 + 2n^2 + 2n - \frac{2n^2 + n}{3} \right\} \\
 &= (n + 1) \left\{ \frac{4}{3}n^2 + \frac{8}{3}n + 1 \right\}
 \end{aligned}$$