微分積分

１．数列の極限

（例題１）

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}$ を求めよ。

$$\frac{4^n}{n!}=\frac{4}{n}\frac{4}{n-1}\frac{4}{n-2}\frac{4}{n-3}\cdots\frac{4}{5}\frac{4}{4}\frac{4}{3}\frac{4}{2}\frac{4}{1}<\frac{4}{n}\cdot\frac{32}{3}$$

$$0<\frac{4^n}{n!}<\frac{4}{n}\cdot\frac{32}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\cdot\frac{32}{3}=0$$

はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!}=0$$

（解法のテクニック）

$n\to\infty$ のとき無限大に行くスピード

$$\log n << x^n << a^n << n! \qquad (a>1)$$

（例題２）

$$a_1=4, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{9}{a_n}\right),$$

(1) $a_n>3$

(2) $a_{n+1}<a_n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（解答）

(1) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{9}{a_n}\right)\geq\sqrt{a_n\cdot\dfrac{9}{a_n}}=3$

(2)

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{9}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{9}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a_n^2 - 9}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{(a_n+3)(a_n-3)}{a_n} > 0$$

$$\therefore a_n > a_{n+1}$$

(3)

有界単調数列は収束するより

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおくと

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{9}{\alpha}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{2\alpha}$$

$$\alpha^2 = 9$$

$$\alpha = 3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

（例題３）

$$\lim_{n\to\infty} 3^n - 2^n$$

を求めよ。

（解答）

$$\lim_{n\to\infty} 3^n - 2^n = \lim_{n\to\infty} 2^n \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\} = \infty$$

（例題４）

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

を求めよ。

（解答）

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

（解法のテクニック）

・無理数➡有理化

・分数➡分母の最高次で割る。

（例題５）

$a_1 = 2, na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

で定められた $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{n}$ とおき，$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) の一般項と，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（解答）

(1)

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 2 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$$

(2)

$$a_n = nb_n = 3n - 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(3n-1) = \infty$$

（例題６）

$0 < r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ を証明せよ。

$$1<\frac{1}{r}=(1+h), h>0$$

$$n \geq 3$$

$$\frac{1}{r^n}=(1+h)^n>1+nh+\frac{n(n-1)h^2}{2}>\frac{n(n-1)h^2}{2}$$

$$0<r^n<\frac{2}{n(n-1)h^2}$$

$$0<nr^n<\frac{2}{(n-1)h^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)h^2}=0$$

ゆえに，はさみうちの定理より

$$\lim_{n\to\infty} nr^n=0$$

２．関数の極限

（例題１）

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+a}-\sin\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to\infty} 2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to\infty} 2\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}$$

$$-\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\leq\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}\leq\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}$$

$$\therefore 2\lim_{x\to\infty}\cos\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{a}{2(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}=0$$

（例題２）

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$$

$$\alpha = x - \frac{\pi}{2}, \alpha \to 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha \frac{\sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \alpha \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \lim_{\alpha \to 0} - \cos \alpha \cdot \frac{\alpha}{\sin \alpha} = -1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e = (2.713 \cdots)$$

［証明］

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\frac{1}{n} + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + {}_nC_4\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \cdots$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!n^4} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) + \frac{n(n^2-3n+2)(n-3)}{4!n^4} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) + \frac{n(n^3-6n^2+11n-6)}{4!n^4} + \cdots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right) + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$n!$ の定義

・$0! = 1$

・$n! = n \times (n-1)!$

（例題３）

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ を求めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ を利用。

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = e^2$$

（例題４）

$$\lim_{x\to -0}\frac{\log_a(1-x)}{x}$$

$$x=-\frac{1}{t}, t\to\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}-t\log_a\left(1+\frac{1}{t}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\log_a\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-1}=\log_a\frac{1}{e}$$

（例題５）

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$$

右方極限と左方極限が異なるとき，極限値はない。

$\lim_{x\to a+0}f(x)\neq\lim_{x\to a-0}f(x)$ のとき

$\lim_{x\to a}f(x)$ はない。

３．平均値の定理

（例題１）

平均値の定理を利用して，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\log x, f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\log(x+1)-\log x}{x+1-x}=\frac{1}{c}\Rightarrow\log(x+1)-\log x=\frac{1}{c}$$

となる $c(x<c<x+1)$ が存在する。

$$x<c<x+1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$$

ゆえに

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

４．関数の連続

（関数の連続の条件）

$f(x)$ が $x=c$ で連続であるための条件は

・$x=c$ で定義されている。

・$\lim_{x\to c} f(x)$ が存在する。

・$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

５．微分・導関数

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}a^{f(x)} = a^{f(x)} \log a f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

６．不定積分・定積分

（例題１）

$$\int \frac{x}{e^{x^2}}dx$$

$$x^2 = u, 2xdx = du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{e^u} = \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}\left(-e^{-u}\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

（例題２）

$$\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

【分数関数】

・部分分数に展開

・$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)|$

・$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx, x = a\tan\theta$ とおく。

（例題１）

$$\int \frac{x}{a^2-x^2}dx=\int \frac{x}{(a-x)(a+x)}dx$$

$$=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{a+x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int -\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\log|x-a|+\log|x+a|\right)$$

（例題２）

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$x=a\tan\theta$ とおく。

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^{\sqrt{3}} \frac{-1+1+x^2}{1+x^2}dx=-\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx+\int_0^{\sqrt{3}} dx$$

$$x=\tan\theta, dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \theta:0\to\frac{\pi}{3}$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}+\sqrt{3}$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}+C$$

（例題３）

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx = \frac{1}{3}\log\left|x^3-3x^2+1\right|$$

（例題４）

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-1}dx$$

$$= \int \frac{x^4-1+2}{x^2-1}dx$$

$$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)+2}{x^2-1}dx$$

$$= \int x^2+1+\frac{2}{x^2-1}dx$$

$$= \int x^2+1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+x+\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

（例題４）

$$\int \frac{x^2-4x-8}{x^3-8}dx = \int \frac{x^2-4x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}dx$$

$$\frac{x^2-4x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{a}{x-2}+\frac{bx+c}{x^2+2x+4}$$

$$a(x^2+2x+4)+(bx+c)(x-2)$$

$$= (a+b)x^2+(2a-2b+c)x+4a-2c$$

$$= x^2-4x-8$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a-2b+c=-4 \\ 4a-2c=-8 \end{cases}$$

$$2a-2(1-a)+c=-4 \Rightarrow 4a+c=-2$$

$$-3c=-6 \Rightarrow c=2$$

$$a=-1$$

$$b=2$$

$$= \int -\frac{1}{x+2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = -\log\left|x+2\right|+\log(x^2+2x+4)+C$$

（例題５）

$$\int \frac{x}{(x-1)(2x-1)}dx$$

$$=\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-1}dx$$

$$=\log|x-1|-\log|2x-1|+C$$

（例題６）

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x+1-1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$=\left[\log|x+1|+\frac{1}{x+1}\right]_0^1=\log 2+\frac{1}{2}-1=\log 2-\frac{1}{2}$$

【無理関数】

・分母を有理化。

・$\sqrt{x+A}$ ➡ $\sqrt{x+A}=t$ とおく。

・$\sqrt{x^2+A}$ ➡オイラーの置換 $x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく。

・$\sqrt{a^2-x^2}$ ➡ $x=a\sin\theta$, $a\cos\theta$ とおく。

（例題１）

$$\int \sqrt[6]{(x-1)^2}dx=\int (x-1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C$$

（例題２）

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}dx$$

分母を有理化

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+1}-1$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}dx = \int \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)}dx$$

$$= \int \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x}dx = \int (\sqrt{x+1}-1)dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + C$$

（例題３）

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$$

$$\sqrt{x+1} = t$$

$$x+1 = t^2 \Rightarrow x^2 = (t^2-1)^2$$

$$dx = 2tdt$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{(t^2-1)^2}{t}2tdt$$

$$= 2\int t^4 - 2t^2 + 1dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 2t = \frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1}$$

（例題４）

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

オイラーの置換

$x + \sqrt{x^2+4} = t$ とおく。

$$\sqrt{x^2+4}=t-x$$

$$x^2+4=(t-x)^2$$

$$4=t^2-2tx$$

$$2tx=t^2-4$$

$$x=\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$$

$$dx=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t^2}\right)dt$$

$$t-x=t-\left(\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\int\frac{2t}{t^2+4}\left(\frac{t^2+4}{2t^2}\right)dt=\int\frac{dt}{t}=\log|t|=\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

（例題５）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$x=a\sin\theta$ とおく。

$$dx=a\cos\theta d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta+1}{2}d\theta=a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\right)$$

（例題６）

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x-1}dx$$

$$\sqrt{2x+1}=t$$

$$2x+1=t^2, 2dx=2tdt$$

$$x-1=\frac{t^2-1}{2}$$

$$\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt=2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=2\int 1+\frac{1}{t^2-1}dt=2\int 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t+\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=2\sqrt{2x+1}+\log\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$$

（例題７）

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$x=2\sin\theta, dx=2\cos\theta d\theta, \theta:0\to\frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta d\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}=[\theta]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

（例題８）

$$\int_0^3 \left|x-\sqrt{x}\right|dx=\int_0^1 \sqrt{x}-xdx+\int_1^3 x-\sqrt{x}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3$$

【三角関数】

・三角関数の公式利用

・ $\tan\frac{x}{2}=t$ とおく。

$$\int \sin^{2n+1} x dx \Rightarrow \int (1-\cos^2 x)^n \sin x dx$$

$\cos x=t, -\sin x dx=dt$

$$\int (1-t^2)^n - dt$$

・

$$\int \cos^{2n+1} x dx \Rightarrow \int (1-\sin^2 x)^n \cos x dx$$

$\sin x=t, \cos x dx=dt$

$$\int (1-t^2)^n dt$$

・ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$

（例題１）

（解法のテクニック）

$\sin^2 x, \sin^4 x, \cos^2 x, \cos^4 x$ の積分は，公式

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ を用いて

求めることができる。

$$\int \sin^4 x dx = \int (1-\cos^2 x)^2 dx = \int \left(1-\frac{\cos 2x+1}{2}\right)^2 dx$$

$$=\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4} - \cos 2x + \frac{\cos^2 2x}{4} dx$$

$$=\int \frac{1}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos 4x+1}{2} dx = \frac{3}{8}x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{32}$$

（例題２）

$$\int \frac{1}{\tan x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \log|\sin x|$$

（例題３）

$$\int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)^2}dx$$

$$\sin x = t, \cos x dx = dt$$

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2}dt = \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2}$$

$$\frac{1}{(1+t)^2(1-t)^2} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\right\}^2 = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{2}{(1+t)(1-t)}+\frac{1}{(1-t)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(t-1)^2}\right\}$$

$$\frac{1}{4}\int\left\{\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(t-1)^2}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-(t+1)^{-1}+\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-(t-1)^{-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{t+1}+\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{t-1}\right\} = \frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{\sin x+1}+\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|-\frac{1}{\sin x-1}\right\}$$

$$= -\frac{\sin x}{2(\sin^2 x-1)}+\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$$

（別解）

$$I = \int \frac{1}{\cos^3 x}dx = \int \frac{1}{\cos x}(\tan x)'dx = \frac{1}{\cos x}\tan x - \int -\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\tan x dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1}{\cos^3 x}dx + \int \frac{1}{\cos x}dx$$

（解法のテクニック）
右辺に $-I$ がある。
左辺に移行して， $2I$ とできる。

$$2I=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\frac{1}{\cos x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x=t, \cos xdx=dt$

$$2I=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\int\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}dt=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}dt$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$$

$$I=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$$

（例題４）

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx$$

（解法のテクニック）

$f(x)$ が偶関数のとき

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2xdx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}+\left[\frac{x^2\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\cos 2x}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}+\left[\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{4}$$

（例題５）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}dx$$

$\sin x = t, \cos dx = dt, t : 0 \to 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{2-t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t}dt = \int_0^1 -\frac{1}{t-\sqrt{2}} + \frac{1}{t+\sqrt{2}}dt$$

$$= \left[\log\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|\right]_0^1 = \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \log(3+2\sqrt{2})$$

（例題６）

（解法のテクニック）

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用

$$\int \frac{1}{\cos^6 x}dx = \int (1+\tan^2 x)(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}d = \int (1+2\tan^2 x+\tan^4 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$

（例題７）

$$\int \frac{3\sin^3 x - 3\sin x + \cos^3 x - 2}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \frac{3(1-\cos^2 x)\sin x - 3\sin x}{\cos^2 x} + \cos x - \frac{2}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int -\sin x + \cos x - \frac{2}{\cos^2 x}dx$$

$$= \cos x + \sin x - 2\tan x + C$$

（例題８）

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}+2}dx$$

$$\sqrt{\sin x}=t, \sin x=t^2, \cos xdx=2tdt$$

$$\int \frac{2tdt}{t+2}$$

$$=2\int \frac{t}{t+2}dt$$

$$=2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt$$

$$=2\int 1-\frac{2}{t+2}dt$$

$$=2t-4\log|t+2|=2\sqrt{\sin x}-4\log(\sqrt{\sin x}+2)$$

（例題９）

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{4}\tan^4 x+C$$

（例題１０）

$$\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\cos^2 x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$$

$$=\int \frac{\cos^2 x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int 1-\sin xdx=x+\cos x+C$$

（例題１１）

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\sin^2 2\theta}$$

$$\tan\theta = t, t : 1 \to \sqrt{3}$$

$$1 + t^2 = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$2tdt = 2\tan\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\frac{1}{1+t^2} dt = d\theta$$

$$\sin^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta = 1 - \left(\frac{2\cos^2\theta - 1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \cos^2\theta = \frac{3}{2} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{3(1+t^2)-2}{2(1+t^2)} = \frac{1+3t^2}{2(1+t^2)}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2(1+t^2)}{3t^2+1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{3t^2+1} dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{3}} dt$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan\alpha, \alpha : \frac{\pi}{3} \to \tan^{-1} 3, dt = \frac{1}{\sqrt{3}\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\tan^{-1} 3} \frac{1}{\frac{1}{3}\tan^2\alpha + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\cos^2\alpha} d\alpha$$

$$= \sqrt{3}[\alpha]_{\frac{\pi}{3}}^{\tan^{-1} 3} = \sqrt{3}\tan^{-1} 3 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

【指数関数・対数関数】

・$e^x = t, e^x dx = dt$

・$\log x = t, \frac{dx}{x} = dt$

・部分積分

（例題１）

$$\int \frac{\log x}{x^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x dx$$

$$= -\frac{1}{x}\log x - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\log x + \int x^{-2} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\log x - \frac{1}{x} + C$$

（例題２）

$$\int_0^1 \log(x^2+1) dx = \int_0^1 x' \log(x^2+1) dx$$

$$= \left[x\log(x^2+1)\right]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= \log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$x = \tan\theta, dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}, \theta : 0 \to \frac{\pi}{4}$$

$$= \log 2 - 2[x]_0^1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

（例題３）

$$\int \frac{a^{3x}+1}{a^x+1}dx = \int \frac{(a^x+1)(a^{2x}-a^x+1)}{a^x+1}dx$$

$$= \int a^{2x}-a^x+1dx$$

$$= \frac{1}{2\log a}a^{2x}-\frac{a^x}{\log a}+x+C$$

（例題４）

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x}dx = -e^{-x}+C$$

（例題５）

$$\int_{-1}^{1} xe^{x^2} = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

７．微分方程式

【変数分離形】

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

（例題１）

$$\frac{dM}{dt} = -M$$

$$\frac{dM}{M} = -dt$$

$$\int \frac{dM}{M} = \int -dt$$

$$\log M = -t + C$$

積分定数 C は初期条件より求まる。

8. 近似式

・１次近似

$$|h| \approx 0$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h$$

・2 次近似

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} f''(a)h^2$$