（問題４０１）

2 つの関数 $g(x), f(x)(x \geq 0)$ を積分を使って， $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt, f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-(1+s^2)x}}{1+s^2}ds$ で定義する。 f を x で微分すると， $f'(x)=-\int_0^1 e^{-(1+s^2)x}ds$ となることがわかっている。このとき

(1) $f(0)$ の値を求めよ。

(2) 不等式 $f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}(x \geq 0)$ が成り立つことを示せ。

これより， $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$ となる。更に,

(3) $h(x)=\left\{g\left(\sqrt{x}\right)\right\}^2$ とおけば， $f'(x)=-h'(x)$ となることを示せ。

(4) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ の値を求めよ。

（問題４０２）

k, p を自然数とし， $J_{k,p}=\int_0^1 x^k(1-x)^p dx$ とおく。

(1) $J_{k,1}$ の値を求めよ。

(2) $p \geq 2$ のとき， $J_{k,p}=\frac{p}{k+1}J_{k+1,p-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)の結果を用いて $J_{k,p}$ の値を求めよ。

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k J_{k,n-k}=0.8$ となるような自然数 n の値を求めよ。

（問題４０３）

自然数 n について， $I_n=\int_1^e \left(\log x\right)^n dx$ とする。

(1) I_1 を求めよ。

(2) I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(3) I_4 を求めよ。

（問題４０４）

p を与えられた自然数とし，数列 $\{a_n\}$ を以下のように定める。

(A) $a_1 = \dfrac{1}{p(p+1)} - \dfrac{1}{2}$

(B) a_n が有理数のとき， $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a_n$

(C) a_n が無理数のとき， $a_{n+1} = \sqrt{2} a_n + \dfrac{16}{n(n+2)(n+4)}$

次の問いの答えよ。ただし， $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1) $b_m = a_{2m-1}$ とするとき， $m = 1, 2, \cdots, p$ に対し

$$b_m = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{m(m+1)}$$

であることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ。

（問題４０５）

k, n を正整数とする。$I(k,n)$ を $I(k,n) = \int_0^1 x^{2k} \cos n\pi x dx$ で与えられる定積分の値とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $I(1,n)$ を求めよ。

(2) $I(k,n)$ を $I(k-1,n)$ で表せ。これを利用して $I(k,n)$ が

$$I(k,n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{n+i-1}(2k)!}{(n\pi)^{2i}(2k-2i+1)!}$$ となることを示せ。

(3) 積分 $J = \int_0^1 \left(A_0 + A_1 \cos \pi x - x^{2k}\right)^2 dx$ を最小にする定数 A_0, A_1 の値を求めよ。

また，そのときの最小値 $J_{\min}$ を求めよ。

（問題４０６）

関数 $f_n(x),(n=1,2.3\cdots)$ を次式で定義する。

$$f_1(x)=e^x$$
$$f_{n+1}(x)=e^x+\int_0^1 tf_n(t)dt,(n\geq 1)$$

(1) $a_n=\int_0^1 tf_n(t)dt$ とおくとき，a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ。

（問題４０７）

n を正の整数とする。分数 $\dfrac{k}{6^n}$ （k は正の整数）のうち，1 以下の分数の総和を S_n， 1 以下の既約分数の総和を T_n とする。次の問いに答えよ。

(1) S_n および T_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{S_n}$ を求めよ。

（問題４０８）

数列 $\{a_n\}$ が $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)^2$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k^2$ を求めよ。

（問題４０９）

空間の定点 $O(0,0,0), A(4,4,4)$ および点 $Q(x',y',z')$ があり，

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OQ}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=4\cdots$①が満たされている。いま点 $P(x,y,z)$ が

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ で与えられているとする。点 Q が①を満たす範囲を動くとき，点 P の描く図形の方程式を求めよ。

（問題４１０）

座標空間において，３点 $A(1,1,1), B(1,0,2), C(2,0,0)$ をとる。

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 点 P が xy 平面上の曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ を動くとき，四面体 PABC の体積の最大値と最小値を求めよ。

（問題４１１）

$x>0$ で定義された関数 $f(x)=e^{-ax}\sin \pi x$ について，次の問いに答えよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標を小さい方から順に $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ とするとき，x_n を求めよ。

(2) $x=x_n$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の y 切片を y_n とするとき，y_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{n}=\frac{1}{2}$ となるような a の値を求めよ。

（問題４１２）

ある放射性物質が，放射線を出しながら崩壊する速さはそのときの放射性物質の量に比例する。その比例定数を１とし，１時間ごとにその物質が m ずつ供給されるものとする。ただし $m>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=0$ に初めて m 供給されたとき，次回の供給まで $(0\leq t<1)$ の量 $M_1(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) (1)で求めた微分方程式を解き，$M_1(t)$ を求めよ。

(3) 2 回目の供給後 $(1\leq t<2)$ の量 $M_2(t)$ を求めよ。

(4) n 回目の供給後 $\big((n-1)\leq t<n\big)$ の量 $M_n(t)$ を求めよ。

（問題４１３）

3 つの実数 x, y, z が $x+y+z=3, x^2+y^2+z^2=9, x^3+y^3+z^3=21$ を満たす。

ただし，$x \geq y \geq z$ とする。
(1) xyz の値を求めよ。
(2) x, y, z の値を求めよ。

（問題４１４）

連続関数 $f(x)$ は $f(0)=1$ であり，任意の実数 x について

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = a\sin x + b\cos x$$

を満たしているとする。

(1) 定数 a, b の値を求めよ。

(2) $g(x)=f(x)-\cos x$ とおくとき，$g(x)$ は奇関数であることを示せ。

(3) $x \geq 0$ のとき，不等式 $\int_{-x}^{x} \{f(t)\}^2 dt \geq \int_{-x}^{x} \cos^2 t dt$ を証明せよ。

（問題４１５）

n は自然数。$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ で B が $BPA=P$ を満足する。

(1) $\left(A^{-1}\right)^n$ を求めよ。

(2) B^n を求めよ。

（問題４１６）

空間に直線 $l : x-4=-y=\dfrac{z-3}{4}$ と平面 $\pi : x-4y+z+2=0$ がある。
(1) 直線 l の平面 π への正射影を l' とする。l' の方程式を求めよ。
(2) l と l' を含む平面の方程式を求めよ。

(3) l と l' のなす角 $\theta\left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

（問題４１７）

数列$\{a_k\},\{b_k\},\{c_k\}(k=1,2,3,\cdots)$を$a_k=\dfrac{1}{2^k},b_k=\dfrac{k}{2^k},c_k=\dfrac{k^2}{2^k}$によってそれぞれ定める。

$k=1,2,3,\cdots$に対し$a_kx+b_ky+c_kz=1$をπ_kとする。

(1) 数列$\{a_k\},\{b_k\},\{c_k\}(k=1,2,3,\cdots)$の初項から第$n$項までの和$A_n,B_n,C_n$をそれぞれ求めよ。

(2) 空間座標の$x>0,y>0,z>0$で定まる部分をTとする。原点から出るT内の半直線をgとし，gと平面π_kとの交点をQ_kとする。g上の点P_nを

$$\frac{1}{OP_n}=\frac{1}{OQ_1}+\frac{1}{OQ_2}+\cdots+\frac{1}{OQ_n}$$

によって定める。いま，原点から出る半直線gがT内全体を動くとき，点P_nの作る図形S_nの方程式をA_n,B_n,C_nを用いて表せ。

(3) (2)の点P_nの座標を(x_n,y_n,z_n)とし，それぞれの極限値を$x=\lim_{n\to\infty}x_n,y=\lim_{n\to\infty}y_n$ $z=\lim_{n\to\infty}z_n$とおくとき，x,y,zが満たす関係式を求めよ。ただし，$0<r<1$のとき$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$および$\lim_{n\to\infty}n^2r^n$は用いてもよい。

（問題４１８）

空間に2平面$\alpha:\dfrac{1}{2}x-y+z+1=0,\beta:-2x+y+2z-1=0$がある。

(1) αとβとの交線lを求めよ。

(2) lを含み，αとβのなす角を2等分する平面を求めよ。

(3) 点$P(1,4,1)$のαに対する対称点Qの座標を求めよ。

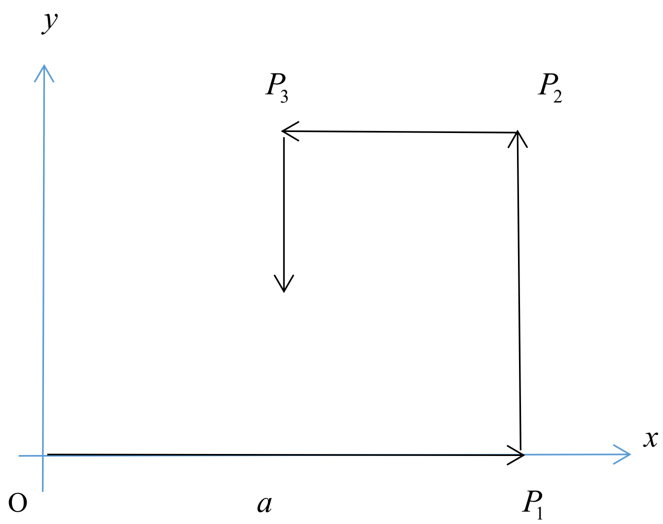
（問題４１９）
次の不等式を証明せよ。

(1) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$

(2) $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

(3) $\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$

（問題４２０）
座標平面上で，原点 O から出発した動点 P が，図のように，$P_1, P_2, P_3, \cdots$ と座標軸に対して平行に進んでは90° 左に折れ曲がることを限りなく繰り返していく。
$OP_1 = a, P_1P_2 = \dfrac{2}{3}OP_1, P_2P_3 = \dfrac{2}{3}P_1P_{2,\cdots,}P_nP_{n+1} = \dfrac{2}{3}P_{n-1}P_n, \cdots$ とするとき P がちかづいていく点の座標を求めよ。



（問題４２１）
正５角形の１辺を a とする。この正５角形の外接円，内接円の半径を求めよ。

（問題４２２）
A,B,C の 3 チームが野球のリーグ戦をすることになった。表に左の欄のチームがそれぞれ上の欄のチームに勝つ勝率が示されている。

（例）A が B に勝つ確率$\dfrac{2}{3}$

	A	B	C
A	＊	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{5}$
B		＊	$\dfrac{3}{4}$
C			＊

(1)A が２勝する確率を求めよ。
(2) A が１勝１敗する確率を求めよ。
(3) A が２敗する確率を求めよ。

（問題４２３）
箱の中に１から n までの数字を書いた札が各１枚，計 n 枚入っている。その中から１枚取り出してもとに戻すという試行を，同じ札が２回出てくるまで続けるものとする。

(1) $k+1$ 回目に試行が終わる確率 $p_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ を求めよ。

(2) $p_k < p_{k+1}$ となるための k の条件を求めよ。

(3) $n=50$ のとき p_k の値を最大にする k の値を求めよ。

（問題４２４）
１枚のコインを n 回投げて表が続いて出ない確率を求めよ。

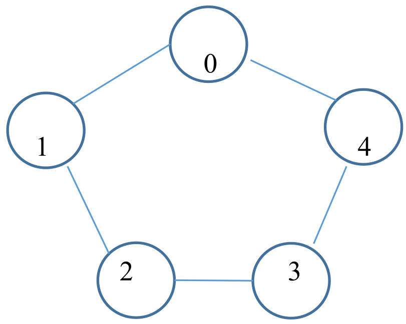
（問題４２５）

図のように正五角形の頂点に 0 から 4 までの番号をつける。頂点 0 から出発するものとして，サイコロを投げて，出た目の数だけ頂点を反時計回りに進むものとする。次の問いに答えよ。

(1) サイコロを 2 回投げたときに，頂点 0 に至る確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回投げたときに，頂点 0 に至る確率を求めよ。

(3) サイコロを 4 回投げたときに，目の数の和が 7 以下という条件のもとで，頂点 0 に至る確率を求めよ。



（問題４２６）

(1) $x \geq 0$ において，常に $x - ax^3 \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + bx^5$ を満たすような定数 a, b について最小となるものをそれぞれ求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$ を求めよ。

(3) n が 2 以上の自然数のとき，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x^k \left(\frac{1}{\sin^n x} - \frac{1}{x^n}\right)$ が 0 でない値の収束するような k の値を求めよ。

（問題４２７）

xyz 空間において，点 $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,1)$ を含む平面上に A を中心とする半径 1 の円板がある。この円板を z 軸の周りに 1 回転してできる立体を V とする。点 $(0,0,t)$ を通り z 軸に垂直な平面で V を切った切り口の面積を $S(t)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。

（問題４２８）

$\lim_{n\to\infty} n^4 r^n = 0(0<r<1)$ を証明せよ。

（問題４２９）

行列 $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される１次変換を f とする。

(1) f によって動かない点を全て求めよ。

(2) f によってそれ自身に移される直線を全て求めよ。

(3) (a,b) を平面上の任意の点とする。点 (a,b) が f により点 (a_1,b_1) へ移され，更に

点 (a_1,b_1) が f により点 (a_2,b_2) へ移され，以下同様にして点 (a_n,b_n) が f により

点 (a_{n+1},b_{n+1}) へ移されるとする。このとき $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ を a,b を用いて表せ。

（問題４３０）

(1) $\int \frac{t^4-t^2+1}{1-t^6}\,dt$ を求めよ。

(2) $\int \frac{1}{\cos^5 x}\,dx$ を求めよ。

（問題４３１）

(1) 自然数 n に対して，次の不等式を証明せよ。

$n\log n - n + 1 \le \log(n!) \le (n+1)\log(n+1) - n$

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log n - n}$ を求めよ。

（問題４３２）

式$x_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta(n=0,1,2,\cdots)$によって定義される数列$\{x_n\}$について

(1) $x_n=\dfrac{n-1}{n}x_{n-2}$を示せ。

(2) x_n,x_{n+1}の値を求めよ。

(3) 不等式$x_n>x_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$が成り立つことを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty}nx_n^2$を求めよ。

（問題４３３）

$OA=3,OB=4$である三角形OABにおいて,辺OAを$1:2$に内分する点をP,辺OBを$3:2$に内分する点をQとする。更に，線分AQを$5:1$に内分する点をRとする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{BR}$をベクトル$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

(2) 点Rは線分BP上にあることを示せ。

(3) $AQ\perp BP$であるとき，内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$を求めよ。

（問題４３４）

数列$\{a_n\}$を$a_n=r^n+r^{n+1}+\cdots+r^{2n}(n\geq 1)$で定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) この数列が収束するための条件を求めよ。

(2) (1)の条件を満たすrに対して，無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$の和を求めよ。

（問題４３５）

$f(x)$が区間$0\leq x\leq 1$で定義された連続関数のとき,

$$\int_0^1 tf(t)f(1-t)dt=ア\boxed{}\int_0^1(1-t)f(t)f(1-t)dt=イ\boxed{}\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$

が成り立つ。

したがって，$\int_0^1(1-t)\sin\pi t\sin\pi(1-t)dt=ウ\boxed{}$ である。

（問題４３６）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)$$

を求めよ。

（問題４３７）

xyz 空間において関係 $z=-2\sqrt{2-x^2-y^2}$ を保ちながら動く点 P がある。時刻 t での P の座標を $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ とするとき，P は

$$\frac{dx}{dt}=-x+\sqrt{3}y,\frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}x-y$$

を満たし，$t=0$ のとき点 $A(1,0,-2)$ にあるものとする。

(1) $r(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$ とおくとき，t の関数 $r(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

(2) 動点 P は $t\to+\infty$ のときある点 B に近づく。B の座標を求めよ。

(3) 時刻 t における点 P の速さを $v(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ とする。

関数 $E(t)$ を，$E(t)=\int_0^t v(s)^2ds$ で定めるとき，$\lim_{t\to+\infty}E(t)$ を求めよ。

（問題４３８）

次の関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

$$f(x)=\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2\left(\int_x^a g(t)dt\right),(0\leq x\leq a)$$

ここで，α は正の定数，$g(t)$ は $0\leq t\leq\alpha$ で定義された連続関数で，$g(t)\geq 0$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，最大値を $S=\int_0^\alpha g(t)dt$ を用いて表せ。

(2) $\alpha=0.999,g(t)=6t^3$ とするとき，$f(x)$ の最大値を小数点以下 6 位を四捨五入して第 5 位まで求めよ。

（問題４３９）

行列 $A=\begin{pmatrix} k-2 & 2 \\ 2 & k+2 \end{pmatrix}$ とおき， t は $t\neq -\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。

(1) 行列 A が逆行列をもつための k の条件を述べ， A^{-1} を求めよ。

(2) k は正であって(1)の条件を満たすとする。$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ によって定まる a,b,c,d に対して，空間の

点 $Q(a,b,0), R(0,c,d)$ を考える。いま点 $P(1,9t,-1)$ に対し，

ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{QR}$ が t の値に関係なく垂直であるように k の値を定めよ。

ただし，O は座標頂点とする。

(3) で定めた k に対して，4 点 O,P,Q,R が同一平面上にあるとき， t の値を求めよ。

（問題４４０）

逆行列をもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して， $F_A(x)$ は関数 $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ を表すものとする。

(1) $F_A(x)=x$ が恒等的に成り立つような A を求めよ。

(2) $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ も逆行列を持つ行列であるとき，$F_{AB}(x)=F_A\left(F_B(x)\right)$ が成り立つことを示せ。

(3) $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とし， $a_n=F_{A^n}(2)(n=1,2,\cdots)$ により，数列 $\{a_n\}$ を定める。$\lim_{n\to\infty} a_n=3$ となることを示せ。